14

Le calcul des variations et ses applications[1]

Ce chapitre est plus « classique » que les autres. Il introduit au calcul des variations, un très beau chapitre des mathématiques, trop souvent méconnu des mathématiciens. Une connaissance du calcul à plusieurs variables suffira, mais une connaissance élémentaire des équations différentielles sera un atout.

Le chapitre contient plus de matière que ce qu'on peut traiter en une semaine. Si l'on veut y consacrer une semaine, on commence par motiver le calcul des variations par des exemples de problèmes se ramenant à minimiser une fonctionnelle (section 14.1). On montre ensuite comment dériver la condition nécessaire d'Euler–Lagrange et le cas particulier de l'identité de Beltrami (section 14.2). On solutionne enfin les questions formulées à la section 14.1, dont le problème classique de la brachistochrone (section 14.4). Pour traiter le reste du chapitre, il faut disposer d'une deuxième ou même d'une troisième semaine. Cependant, le niveau mathématique reste constant tout au long du chapitre (il n'y a pas de partie avancée).

Certaines sections poursuivent l'étude des propriétés de la cycloïde qui constitue la solution au problème de la brachistochrone : la propriété tautochrone est présentée à la section 14.6 et le pendule isochrone de Huygens, à la section 14.7. Ces deux sections n'utilisent pas le calcul des variations, mais donnent des exemples de modélisation ayant suscité des espoirs d'applications technologiques.

Toutes les autres sections abordent un nouveau problème du calcul des variations : le tunnel le plus rapide (section 14.5), les bulles de savon (section 14.8), des problèmes isopérimétriques tels la chaînette, l'arc tenant sous son propre poids (section 14.10) et le télescope à miroir liquide (section 14.11).

La section 14.9 porte sur le principe de Hamilton, qui reformule la mécanique classique au moyen d'un principe variationnel. Moins « technologique » que les autres, cette section se veut un enrichissement culturel pour les étudiants en mathématiques qui ont été initiés à la mécanique newtonienne et n'ont pas eu l'occasion de pousser plus loin leur étude de la physique.

[1] La première version de ce chapitre a été réalisée par Hélène Antaya au début de ses études de premier cycle en mathématiques.

14.1 Le problème fondamental du calcul des variations

Le calcul des variations est une branche des mathématiques qui permet d'optimiser des quantités physiques (comme le temps, la surface ou la distance). Il trouve des applications dans des domaines aussi variés que l'aéronautique (maximiser la portée d'une aile d'avion), la conception d'équipements sportifs performants (minimiser la friction de l'air sur un casque de cycliste, optimiser la forme d'un ski), la résistance des structures (maximiser la résistance d'une colonne, d'un barrage hydroélectrique, d'une voûte), l'optimisation des formes (profiler la coque d'un navire), la physique (calculer les trajectoires des corps en mécanique classique et les géodésiques en relativité générale), etc.

Deux exemples permettent de comprendre les problèmes auxquels s'attaque le calcul des variations.

Exemple 14.1 *Cet exemple est très simple, et nous connaissons déjà la réponse au problème. Sa formulation nous aidera cependant par la suite. Il s'agit de trouver le chemin le plus court entre deux points $A = (x_1, y_1)$ et $B = (x_2, y_2)$. Nous savons que la réponse est la ligne droite, mais nous ferons l'effort de reformuler ce problème dans le langage du calcul des variations. Supposons que $x_1 \neq x_2$ et qu'il est possible d'écrire la seconde coordonnée comme fonction de la première. Alors, le chemin est donné par $(x, y(x))$ pour $x \in [x_1, x_2]$, $y(x_1) = y_1$ et $y(x_2) = y_2$. La quantité I dont on doit trouver le minimum est ici la longueur du chemin entre A et B selon la trajectoire. Cette quantité $I(y)$ dépend évidemment de la trajectoire choisie et donc, de la fonction $y(x)$. Cette « fonction d'une fonction » est appelée une* fonctionnelle *par les mathématiciens.*

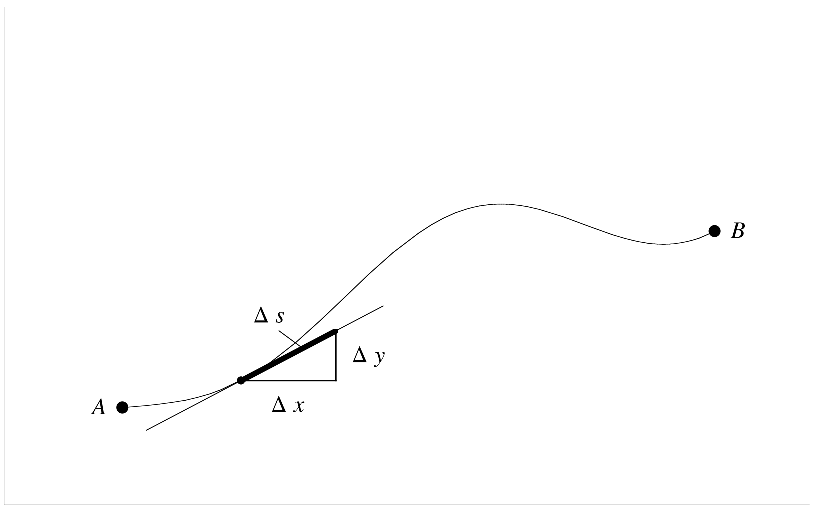

Fig. 14.1. Une trajectoire entre les deux points A et B

À chaque incrément Δx le long d'une trajectoire correspond un court segment de la trajectoire dont la longueur, notée Δs, dépend de x. La longueur totale du chemin est donc

$$I(y) = \sum \Delta s(x).$$

À l'aide du théorème de Pythagore, cette longueur Δs peut être approximée, pour Δx suffisamment petit, par $\Delta s(x) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ comme l'indique la figure 14.1. Ainsi,

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x.$$

Si Δx tend vers zéro, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ devient la dérivée $\frac{dy}{dx}$, et l'intégrale I,

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}dx. \tag{14.1}$$

Trouver le plus court chemin entre les points A et B s'énonce comme suit dans le calcul des variations : quelle trajectoire $(x, y(x))$ allant de A à B minimise la fonctionnelle I ? Nous reviendrons sur ce problème à la section 14.3.

Ce premier exemple ne convaincra personne de l'utilité du calcul des variations. La question posée (trouver la trajectoire $(x, y(x))$ minimisant l'intégrale I) semble bien difficile pour résoudre un problème dont on connaît déjà la solution. C'est pourquoi nous présentons un second exemple dont la solution, elle, ne sera sans doute pas évidente.

Exemple 14.2 *Quelle est la meilleure piste de planche à roulettes ? La demi-lune est populaire en planche à roulettes, mais aussi en planche à neige, sport qui est devenu une discipline olympique aux Jeux de Nagano en 1998 ; elle a la forme d'une cuvette aux murs légèrement arrondis. Le planchiste, glisse d'une paroi à l'autre de la cuvette et exécute des prouesses acrobatiques quand il atteint les sommets. Trois profils possibles sont présentés à la figure 14.2. Les trois ont les mêmes sommets (A et C) et le même fond (B). Le profil en pointillé requiert une explication : il faut imaginer qu'on ajoute un petit quart de cercle dans chaque coin pour transformer la vitesse verticale en vitesse horizontale (ou le contraire) et qu'on prend ensuite la limite lorsque le rayon du quart de cercle tend vers zéro. Ce parcours serait casse-cou puisqu'il contient deux angles droits ; il permettrait cependant au sportif démarrant du point A d'atteindre très tôt une grande vitesse parce que cette piste commence par une chute libre. Le profil en traits discontinus est constitué des segments de droite AB et BC ; c'est donc le profil passant par A, B et C qui est le plus court en distance.*

Mais que veut dire « la meilleure piste » ? Cette formulation n'est guère mathématique. Nous la changerons pour la définition suivante : quelle est la piste qui permet de se rendre du point A au point B dans le temps le plus court ? Cette nouvelle définition est précise mathématiquement, mais elle pourrait ne pas satisfaire les sportifs. Elle semble malgré tout un bon compromis. Selon cette définition précise, quel est le meilleur profil *de cuvette ? Le sportif a-t-il avantage à atteindre la plus grande vitesse rapidement même si sa trajectoire sera plus longue (profil en pointillé), devra-t-il opter pour le profil constitué de deux segments de droite ou encore choisir une courbe entre ces deux extrêmes, telle la courbe lisse de la figure 14.2 ?*

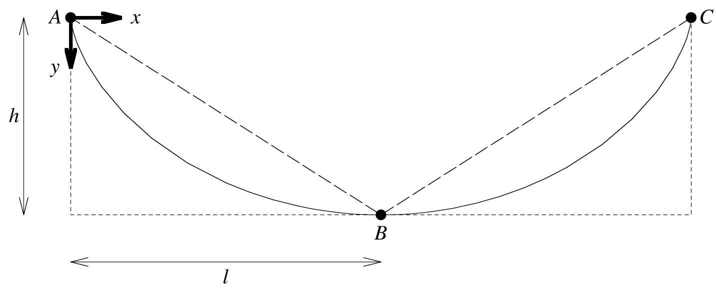

Fig. 14.2. Trois profils possibles pour la meilleure piste de planche à roulettes

Il est relativement aisé de calculer le temps de parcours pour les deux profils extrêmes. Mais nous montrerons sous peu que le « meilleur » profil est celui d'une courbe lisse entre ces deux extrêmes. Calculons donc le temps de parcours entre les points A et B pour une courbe quelconque $(x, y(x))$.

Lemme 14.3 *Soit un système d'axes tel que l'axe des y pointe vers le bas comme sur la figure 14.2, et une courbe $y(x)$ telle que $A = (x_1, y(x_1))$ et $B = (x_2, y(x_2))$. Le temps de parcours d'un point matériel parcourant la courbe de A à B sous la seule action de son poids est donné par*

$$I(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} dx. \tag{14.2}$$

Preuve La clé pour calculer le temps de parcours est le principe physique de la conservation de l'énergie. L'énergie totale E du point matériel est la somme de son énergie cinétique ($T = \frac{1}{2}mv^2$) et de son énergie potentielle ($V = -mgy$). (Attention : le signe « $-$ » dans V s'explique par le fait que y croît vers le bas alors que l'énergie potentielle diminue dans cette direction.) Ici, m est la masse du point matériel, v sa vitesse, et g est l'accélération due à la gravité. Cette constante vaut $g \approx 9{,}8\ m/s^2$ à la surface de la Terre. L'énergie $E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - mgy$ du point matériel est conservée pendant la glissade dans la cuvette, c'est-à-dire qu'elle est constante. Si la vitesse du point matériel en A est nulle, alors E est nulle au départ et donc, tout le long de la trajectoire. Ainsi la vitesse du point matériel est reliée à sa hauteur par $E = 0$, c'est-à-dire que $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$ ou encore

$$v = \sqrt{2gy}. \tag{14.3}$$

Le temps de parcours est la somme sur tous les accroissements infinitésimaux dx du temps dt pris pour parcourir la distance ds correspondante. Ce temps est évidemment le quotient de la distance ds par la vitesse à ce moment de la glissade. Donc,

$$I(y) = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{v}.$$

L'exemple 14.1 a montré que, pour dx infinitésimal, $ds = \sqrt{1 + (y')^2}dx$ où y' est la dérivée de y par rapport à x. Le temps de parcours est donc donné par l'intégrale (14.2). □

Retour sur l'exemple 14.2. Le lemme 14.3 établit que l'intégrale à minimiser est bien (14.2) sous les conditions aux limites $A = (x_1, 0)$ et $B = (x_2, y_2)$. Le problème de la meilleure piste de planche à roulettes revient à trouver la fonction $y = y(x)$ qui minimise l'intégrale I. Ce problème semble beaucoup plus difficile que le premier !

Les problèmes des exemples 14.1 et 14.2 appartiennent au domaine des mathématiques appelé *calcul des variations*. Il est possible qu'ils vous rappellent les problèmes d'optimisation que l'on rencontre dans les cours de calcul différentiel. Dans ces cours, vous deviez trouver les extrema d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ceux-ci se trouvent aux points où la dérivée s'annule ou encore, aux extrémités de l'intervalle. Le calcul différentiel nous fournit donc un outil très puissant pour résoudre ce type de problèmes. Les problèmes des exemples 14.1 et 14.2 sont cependant d'un type différent. En calcul différentiel, la quantité qui varie lors de la recherche de l'extremum de $f(x)$ est une simple variable, x, alors qu'elle est une fonction en calcul des variations (la fonction $y(x)$ paramétrisant la trajectoire). Nous allons cependant voir que l'outil du calcul différentiel est tellement puissant qu'il permet de résoudre les problèmes des exemples 14.1 et 14.2.

Énonçons maintenant le problème fondamental du calcul des variations.

Problème fondamental du calcul des variations Étant donné une fonction $f = f(x, y, y')$, trouver les fonctions $y(x)$ qui mènent à des extrema de l'intégrale

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx$$

sous les conditions aux limites

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1, \\ y(x_2) = y_2. \end{cases}$$

Comment faire pour savoir quelles fonctions $y(x)$ minimisent ou maximisent l'intégrale I ? C'est à cette question que répond l'équation d'Euler–Lagrange.

14.2 L'équation d'Euler–Lagrange

Théorème 14.4 *Une condition nécessaire pour que l'intégrale*

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx \tag{14.4}$$

atteigne un extremum sous les conditions aux limites

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases} \tag{14.5}$$

est que la fonction $y = y(x)$ satisfasse à l'équation d'Euler–Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0. \tag{14.6}$$

Preuve Les cas du minimum et du maximum se traitent similairement. Supposons que l'intégrale I atteigne un minimum pour la fonction particulière y_* qui satisfait donc à $y_*(x_1) = y_1$ et $y_*(x_2) = y_2$. Si nous déformons y_* en la soumettant à certaines variations, mais en conservant les conditions aux limites (14.5), l'intégrale I augmentera forcément, puisqu'elle est minimale pour y_*. Nous choisissons des déformations d'un type particulier, sous la forme d'une famille de fonctions $Y(\epsilon, x)$ représentant des courbes reliant (x_1, y_1) et (x_2, y_2) :

$$Y(\epsilon, x) = y_*(x) + \epsilon g(x). \tag{14.7}$$

Ici ϵ est un nombre réel, et g(x) est une fonction dérivable choisie arbitrairement, mais fixée. Elle doit satisfaire à la condition $g(x_1) = g(x_2) = 0$ qui garantit que $Y(\epsilon, x_1) = y_1$ et que $Y(\epsilon, x_2) = y_2$ pour tout ϵ. Le terme $\epsilon g(x)$ est une *variation* de la fonction minimisatrice, d'où le nom *calcul des variations*.

Pour cette famille de déformations, l'intégrale devient une fonction $I(\epsilon)$ d'une variable réelle :

$$I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, Y, Y')\, dx.$$

Le problème de trouver l'extremum de $I(\epsilon)$ pour cette famille de déformations a donc été ramené à un problème de calcul différentiel ordinaire. Nous devons calculer la dérivée $\frac{dI}{d\epsilon}$ pour trouver les points critiques de $I(\epsilon)$:

$$I'(\epsilon) = \frac{d}{d\epsilon}\int_{x_1}^{x_2} f(x, Y, Y')\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{d\epsilon} f(x, Y, Y')\, dx.$$

Par la formule de dérivation des fonctions composées (que vous connaissez peut-être sous le nom de *règle de la chaîne*), on obtient

$$I'(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial Y'}{\partial \epsilon} \right) dx. \tag{14.8}$$

Mais, dans (14.8), $\frac{\partial x}{\partial \epsilon} = 0$, $\frac{\partial Y}{\partial \epsilon} = g(x)$ et $\frac{\partial Y'}{\partial \epsilon} = g'(x)$. Donc,

$$I'(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} g + \frac{\partial f}{\partial y'} g' \right) dx. \tag{14.9}$$

Le deuxième terme de (14.9) est intégrable par parties :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} g'\, dx = \left[\frac{\partial f}{\partial y'} g \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} g \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx.$$

Le terme de gauche (entre crochets) disparaît puisque $g(x_1) = g(x_2) = 0$. Donc,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} g'\, dx = -\int_{x_1}^{x_2} g \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx, \tag{14.10}$$

et la dérivée $I'(\epsilon)$ devient

$$I'(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] g\, dx.$$

Par hypothèse, le minimum de $I(\epsilon)$ se trouve en $\epsilon = 0$, car c'est alors que $Y(x) = y_*(x)$. La dérivée $I'(\epsilon)$ doit donc être nulle en $\epsilon = 0$

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \Bigg|_{y=y_*} g\, dx = 0.$$

La notation $|_{y=y_*}$ indique que la quantité est évaluée quand la fonction Y est la fonction particulière y_*. Rappelons que la fonction g est arbitraire. Pour que $I'(0)$ soit toujours nulle, quelle que soit g, il faut donc que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \Bigg|_{y=y_*} = 0,$$

qui est l'équation d'Euler–Lagrange. □

Dans certains cas, nous pourrons utiliser des formes simplifiées de l'équation d'Euler–Lagrange, qui nous permettront de trouver la solution plus rapidement et plus facilement. Un de ces « raccourcis » se nomme l'identité de Beltrami.

Théorème 14.5 *Dans les cas où la fonction $f(x, y, y')$ à l'intérieur de l'intégrale (14.4) est explicitement indépendante de x, une condition nécessaire pour que l'intégrale ait un extremum est donnée par l'identité de Beltrami, qui est une forme particulière de l'équation d'Euler–Lagrange :*

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = C, \tag{14.11}$$

où C est une constante.

Preuve Calculons $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$ dans l'équation d'Euler–Lagrange. Par la règle de dérivation des fonctions composées, et puisque f est indépendante de x, on obtient

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y''.$$

Donc, l'équation d'Euler–Lagrange devient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' = \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{14.12}$$

Pour démontrer l'identité de Beltrami, nous devons montrer que la dérivée par rapport à x de la fonction $h = y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f$ est nulle. Calculons cette dérivée :

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx} &= \left(\frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y' y''\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''\right) \\ &= y' \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} y'' - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La dernière égalité découle de (14.12). □

Avant de donner des exemples d'application des équations d'Euler–Lagrange, il est utile de faire quelques remarques et mises en garde.

Les équations d'Euler–Lagrange et de Beltrami sont des *équations différentielles* pour la fonction $y(x)$, c'est-à-dire que ce sont des équations reliant la fonction y à ses dérivées. Résoudre des équations différentielles est une des facettes les plus importantes du calcul différentiel, qui a de multiples applications en sciences et en génie.

Un exemple d'une équation différentielle facile est $y'(x) = y(x)$ (ou simplement $y' = y$). Dans cet exemple, « lire » l'équation aide à la résoudre : quelle est la fonction y dont la dérivée y' est égale à la fonction elle-même ? Beaucoup se rappelleront que la fonction exponentielle a cette propriété : si $y(x) = e^x$, alors $y'(x) = e^x = y(x)$. En effet, la solution la plus générale de $y' = y$ est $y = ce^x$ où c est une constante. Pour déterminer cette constante c, il faut utiliser une autre équation, typiquement une condition aux limites comme (14.5). Il n'existe pas de méthode systématique pour trouver les solutions d'équations différentielles. Ceci n'est pas surprenant : déjà, une équation différentielle simple comme $y' = f(x)$ a pour solution $y = \int f(x)dx$. Or, il n'existe pas toujours de formule pour la primitive d'une fonction, même si on sait qu'une telle primitive existe et qu'on peut évaluer numériquement une intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$. Tout comme pour les méthodes d'intégration, il existe un nombre important de méthodes ad hoc pour des équations différentielles relativement simples et assez communes. Nous verrons quelques exemples de telles solutions dans ce qui suit. Pour les autres, on utilise des méthodes théoriques pour les questions d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle donnée, et des méthodes numériques pour calculer approximativement les solutions. Ces méthodes dépassent le but du présent chapitre. Elle se trouvent par exemple dans [2].

Comme le processus d'optimisation d'une fonction ne dépendant que d'une variable réelle, l'équation d'Euler–Lagrange donne parfois plusieurs solutions, et il faut des tests supplémentaires pour savoir si celles-ci sont des minima, des maxima ou des points d'une autre nature. De plus, ces extrema pourraient être locaux plutôt que globaux. Qu'est-ce qu'un point critique ? Dans les fonctions d'une variable réelle, c'est un point où la dérivée s'annule. Un tel point peut être un extremum ou encore, un point d'inflexion. Et dans les fonctions de plusieurs variables réelles, des points de selle peuvent apparaître. Dans le cadre du calcul des variations mettant en jeu une fonctionnelle (14.4), on dit qu'une fonction $y(x)$ est un point critique de la fonctionnelle si elle est une solution de l'équation d'Euler–Lagrange associée.

Une dernière mise en garde. Si on relit la preuve de l'équation d'Euler–Lagrange, on verra qu'elle n'a de sens que si la fonction y est deux fois différentiable. Mais il peut arriver que la vraie solution d'un problème d'optimisation soit une fonction qui n'est pas différentiable en tous les points du domaine ! Un exemple d'une telle situation se produit dans l'étude du problème suivant : pour un volume et une hauteur donnés, trouver la forme qu'on doit donner à une colonne de révolution pour qu'elle puisse supporter la plus grande pression venant du haut. Nous n'écrirons pas les équations de ce problème, mais son histoire est intéressante. Lagrange pensait avoir prouvé que la solution est un cylindre, mais en 1992, Cox et Overton [3] ont montré que la bonne colonne prend la forme de la figure 14.3. Pourtant, le calcul de Lagrange ne comporte pas d'« erreurs » à

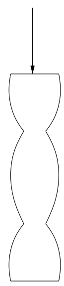

Fig. 14.3. La colonne optimale de Cox et Overton

proprement parler ; seulement il cherche la meilleure fonction dans la classe des fonctions différentiables, alors que la fonction de Cox et Overton ne l'est pas !

Le cas de la colonne n'est pas un exemple isolé. Les pellicules de savon (section 14.8) peuvent avoir des angles. En fait, il est très courant que les problèmes du calcul des variations, aussi appelés problèmes variationnels, aient des solutions non différentiables.

Pour résoudre ce type de problèmes, on a généralisé les notions de dérivées : c'est le sujet de l'analyse non lisse.

14.3 Le principe de Fermat

Nous pouvons maintenant résoudre les deux problèmes de la section 14.1.

Exemple 14.6 (retour sur l'exemple 14.1) *Comme nous l'avons dit, nous connaissons la réponse au premier problème : quel est le chemin le plus court entre les deux points $A = (x_1, y_1)$ et $B = (x_2, y_2)$ du plan ? Sa solution à l'aide de l'équation d'Euler–Lagrange nous fournit cependant un exemple d'équations différentielles. Nous avons déjà reformulé cette question dans les termes du calcul des variations : trouver la fonction $y = y(x)$ qui minimise l'intégrale*

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}dx$$

sous les conditions aux limites

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1, \\ y(x_2) = y_2. \end{cases}$$

La fonction $f(x, y, y')$ est donc $\sqrt{1 + (y')^2}$. Puisque les trois variables x, y et y' sont indépendantes, cette fonction ne dépend ni de x ni de y. Nous ne devrons calculer que le second terme de l'équation d'Euler–Lagrange :

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

et

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le chemin le plus court est décrit par la fonction y satisfaisant à l'équation d'Euler–Lagrange, c'est-à-dire

$$\frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Puisque le dénominateur est toujours positif, nous pouvons multiplier les deux membres de cette équation par cette quantité, et l'équation différentielle à résoudre devient

$$y'' = 0.$$

Même si vous n'avez pas suivi un cours d'équations différentielles, vous pouvez sans doute deviner la solution. Résoudre cette équation différentielle revient à répondre à la *question : quelles sont les fonctions dont la seconde dérivée est identiquement nulle ? La réponse est : tout polynôme du premier degré $y(x) = ax + b$. Ce polynôme dépend de deux constantes a et b qu'il faut déterminer pour que y passe par A et B, c'est-à-dire pour que $y(x_1) = y_1$ et $y(x_2) = y_2$. (Exercice !) Le calcul des variations nous assure donc que le chemin le plus court entre A et B est la droite $y(x) = ax + b$ passant par ces deux points.*

Cet exercice nous a permis de comprendre comment utiliser l'équation d'Euler–Lagrange. Malgré son aspect fort simple, c'est un exemple très riche qui a des généralisations immédiates beaucoup plus difficiles.

Nous savons que la lumière se propage en ligne droite lorsqu'elle est dans un milieu uniforme et qu'elle est réfractée quand elle passe d'un milieu à un autre de densité différente. De plus, un rayon lumineux se réfléchit sur un miroir avec un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Le *principe de Fermat* résume ces observations physiques en un énoncé utilisable directement par le calcul des variations. Il se lit comme suit : la lumière suit le trajet qui prend le temps le plus court. (Voir la section 15.1 du chapitre 15.)

La vitesse de la lumière dans le vide, notée c, est une constante physique fondamentale (approximativement $3,00 \times 10^8$ m/s). Mais la vitesse de la lumière n'est pas la même dans les gaz ou les matériaux comme le verre. Cette vitesse, v, est souvent exprimée à l'aide de l'indice de réfraction n du milieu : $v = \frac{c}{n}$. Si le milieu est homogène, n est constant. Sinon, n dépend de (x, y). Un exemple simple est l'indice de réfraction de l'atmosphère, qui varie en fonction de la densité de l'air et dépend donc de l'altitude. (La situation est encore plus compliquée que cela, car la vitesse de la lumière peut également dépendre de la fréquence de l'onde.) Si on se limite à un problème plan, l'intégrale (14.1) étudiée ci-dessus doit être changée pour tenir compte de cette vitesse variable. Elle prend alors la forme

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dt = \int_{x_1}^{x_2} n(x,y)\frac{ds}{c} = \int_{x_1}^{x_2} n(x,y)\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{c}\,dx.$$

Ici, dt représente un intervalle infinitésimal de temps et ds, un intervalle infinitésimal de longueur qui, le long d'une trajectoire $(x, y(x))$, est $\sqrt{1+(y')^2}dx$. Si n est constant, n et c peuvent être extraits de l'intégrale, et nous retrouvons le problème de l'exemple 14.1.

Par contre, si le milieu n'est pas homogène, la vitesse de la lumière varie selon l'indice de réfraction du milieu dans lequel elle se trouve, et la ligne droite n'est plus le trajet le plus rapide. La lumière est alors réfractée, c'est-à-dire que sa direction est déviée par rapport à la ligne droite. On doit tenir compte de ce fait dans le domaine des télécommunications (par ondes courtes en particulier).

14.4 La meilleure piste de planche à roulettes

Nous sommes maintenant prêts à attaquer le problème plus difficile de la meilleure piste de planche à roulettes. C'est un vieux problème. En fait, sa formulation précède l'invention de la planche à roulettes de près de trois siècles ! Au XVII$^{\text{e}}$ siècle, Jean Bernoulli lance un concours qui occupera les plus grands esprits de l'époque. Il fait insérer le problème suivant dans *Acta Editorum* de Leipzig : « *Deux points A et B étant donnés dans un plan vertical, déterminer la courbe AMB le long de laquelle un mobile M, abandonné en A, descend sous l'action de sa propre pesanteur et parvient à l'autre point B dans le moins de temps possible.* » Le problème prend le nom de brachistochrone, qui veut dire, traduit textuellement, « temps le plus court ». On sait qu'au moins cinq mathématiciens proposèrent une solution : Leibniz, L'Hospital, Newton, Jean Bernoulli lui-même ainsi que son frère Jacques [6].

L'intégrale à minimiser, obtenue en (14.2), est

$$I(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}\, dx,$$

et la fonction $f = f(x, y, y')$ est donc

$$f(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}}.$$

Puisque x n'apparaît pas explicitement dans l'expression de f, nous pouvons appliquer l'identité de Beltrami au lieu de l'équation d'Euler–Lagrange (voir le théorème 14.5). La meilleure piste est donc caractérisée par une fonction y satisfaisant à

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = C.$$

Un calcul direct donne

$$\frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} = C.$$

Nous pouvons simplifier cette expression en mettant ses deux termes au même dénominateur

$$\frac{-1}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{y}} = C.$$

En isolant y', nous obtenons l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{k-y}{y}}, \tag{14.13}$$

où k est une constante égale à $\frac{1}{C^2}$.

Cette équation différentielle est difficile, même pour quelqu'un qui a fait un cours d'équations différentielles. Il est en fait impossible d'exprimer y en fonction de x sous une forme simple. La substitution trigonométrique suivante permet cependant d'intégrer l'équation :

$$\sqrt{\frac{y}{k-y}} = \tan\phi.$$

La fonction ϕ est une nouvelle fonction de x. En isolant y, nous trouvons

$$y = k\sin^2(\phi).$$

La dérivée de la nouvelle fonction x peut être calculée à l'aide de la règle de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{d\phi}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2k(\sin\phi)(\cos\phi)}\cdot\frac{1}{(\tan\phi)} = \frac{1}{2k\sin^2\phi}.$$

Une méthode usuelle pour résoudre cette nouvelle équation est de la réécrire sous la forme

$$dx = 2k\sin^2\phi\, d\phi,$$

qui indique la relation entre les deux accroissements infinitésimaux dx et $d\phi$. En trouvant les primitives des deux membres, nous obtenons

$$x = 2k\int \sin^2\phi\, d\phi = 2k\int \frac{1-\cos 2\phi}{2}\, d\phi = 2k\left(\frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2\phi}{4}\right) + C_1.$$

Nous avons choisi le point initial A de la trajectoire à l'origine du système de coordonnées (voir la figure 14.2). Ce choix permet de fixer la constante d'intégration C_1. En A, les deux coordonnées x et y sont nulles. L'équation $y = k\sin^2\phi$ donne, en ce point, $\phi = 0$ (ou un multiple entier de π). Et dans l'expression ci-dessus pour x, $\phi = 0$ donne $x = C_1$. Il faut donc poser $C_1 = 0$. Finalement, en posant $\frac{k}{2} = a$ et $2\phi = \theta$, on obtient

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1-\cos\theta). \end{cases} \tag{14.14}$$

Ces équations sont les équations paramétriques d'une cycloïde. Une cycloïde est une courbe engendrée par le déplacement d'un point fixé sur un cercle de rayon a qui roule sans glisser sur une droite (figure 14.4).

Voici donc la meilleure piste de planche à roulettes, du moins celle où le sportif, parti en A à vitesse nulle, atteindra le point B dans le temps le plus court ! La courbe lisse tracée entre les deux profils en segments de droite à la figure 14.2 est une cycloïde.

La cycloïde est une courbe bien connue des géomètres. Elle possède d'autres propriétés intéressantes. Par exemple, Christiaan Huygens a découvert que, dans une cuve dont le profil est une cycloïde, la période des oscillations d'une bille est constante, quelle que soit son amplitude. Si on laisse glisser une particule soumise seulement à la gravité à partir de n'importe quel point sur la courbe, elle mettra toujours exactement le même temps à se rendre jusqu'au bas de la courbe. Cette indépendance de la période de l'oscillation par rapport au point de départ est appelée la propriété *tautochrone*. Nous la démontrerons à la section 14.6.

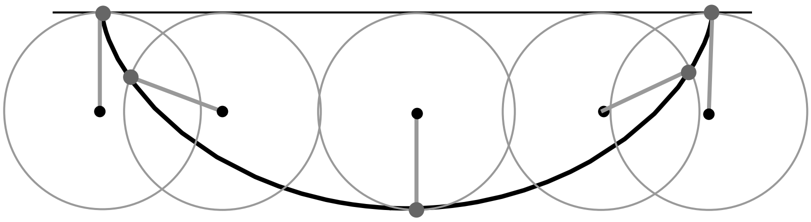

Fig. 14.4. Construction d'une cycloïde

14.5 Le tunnel le plus rapide

Nous abordons maintenant une généralisation de la brachistochrone qui pourrait, en théorie, complètement révolutionner le domaine des transports. Supposons que nous puissions percer l'intérieur de la Terre pour construire un tunnel allant d'une ville A à une ville B à la surface de la Terre. Si on néglige le frottement, un train démarrant à vitesse nulle de A serait attiré vers le centre de la Terre par la gravité, accélérerait tant que le tunnel s'approcherait du centre de la Terre, puis décélererait quand le tunnel s'en éloignerait et, par conversion de l'énergie, ressortirait de ce tunnel en atteignant B à vitesse nulle ! Pas besoin de combustible, pas besoin de frein ! Et nous serons encore plus audacieux : *nous dessinerons dans cette section le profil du tunnel qui sera parcouru le plus rapidement !*

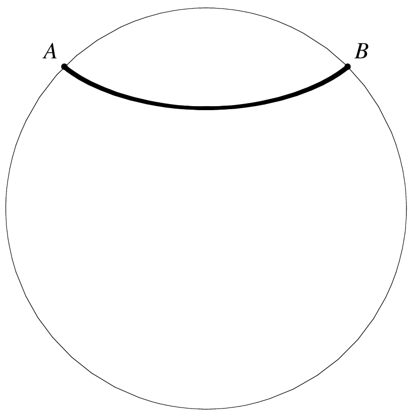

Fig. 14.5. Tunnel entre les deux villes A et B

Un calcul (exercice 13) montrera que le temps de transit par ce « meilleur tunnel » entre New York et Los Angeles est de moins de 30 minutes, contre environ cinq heures en