1

Le positionnement sur la Terre et dans l'espace

Ce chapitre est la meilleure illustration dans le livre de la diversité des applications des mathématiques à une seule question technique : comment localiser les personnes, objets et événements sur la planète. Cette surprenante diversité peut mériter qu'on consacre plus d'une semaine au chapitre.

En deux heures, on peut traiter de la théorie du GPS (section 1.2) et discuter très brièvement les applications à la localisation des orages (section 1.3). Ensuite il faut faire un choix. Si l'on a introduit les corps finis dans le chapitre 6 sur les codes correcteurs d'erreurs ou qu'on les a utilisés dans le chapitre 8 sur les générateurs de nombres aléatoires, alors on peut traiter le signal du GPS en un peu plus d'une heure (section 1.4), parce qu'on peut sauter les rappels sur les corps. Si le temps est limité et qu'on n'a pas vu les préalables sur les corps finis, on peut se contenter d'énoncer le théorème 1.4 et de l'illustrer sur des exemples comme l'exemple 1.5. Il faut compter presque deux heures pour présenter la cartographie (section 1.5), sauf si les étudiants connaissent déjà la notion de transformation conforme. La section 1.2 ne requiert que de la géométrie euclidienne et de l'algèbre linéaire de base, alors que la section 1.3 fait appel à des concepts probabilistes élémentaires. La section 1.4 est plus difficile sauf si on a une certaine familiarité avec les corps finis. La section 1.5 utilise le calcul à plusieurs variables.

1.1 Introduction

De tout temps, l'homme a voulu connaître sa position sur la Terre. Il a commencé par utiliser des moyens élémentaires comme le sextant en navigation, la boussole pour indiquer le nord magnétique, le compas magnétique pour tenir un cap. Depuis peu, on dispose d'outils beaucoup plus sophistiqués comme le GPS (*Global Positioning System*). Dans ce chapitre, nous remonterons le temps : nous commencerons par décrire en détail le système GPS pour ensuite parler, très brièvement, des moyens anciens, principalement sous forme d'exercices.

Comme ces moyens ne sont utiles que si on dispose de cartes du monde, nous accorderons une section à la cartographie. En effet, la Terre étant une sphère, il est impossible de la représenter sur un plan en respectant les angles, les rapports de longueur et les rapports de surface. Des compromis doivent être faits. Les compromis choisis dépendent de la problématique. L'*Atlas de Peters* a fait le choix d'utiliser des projections qui préservent le rapport des surfaces [3]. Dans les cartes marines, on fait le choix d'utiliser une projection qui préserve les angles.

1.2 Le GPS (*Global Positioning System*)

1.2.1 Quelques informations sur le système de GPS

Le système GPS a été complètement déployé en juillet 1995 par le département de la Défense des États-Unis, qui autorise le public à s'en servir. À l'époque, il y avait 24 satellites, dont 21 au minimum fonctionnaient au moins 98 % du temps. En 2005, il y avait 32 satellites, dont 24 au moins en fonctionnement, les autres pouvant prendre la relève en cas de panne de satellites. Les satellites sont situés à une altitude de 20 200 km de la Terre. Ils sont répartis dans six plans orbitaux faisant des angles de 55 degrés avec le plan de l'équateur (figure 1.1). On a au moins quatre satellites par plan orbital, situés environ à égale distance les uns des autres. Les satellites ont une orbite circulaire avec une période de 11 heures et 58 minutes. La disposition des satellites est telle qu'à tout instant et à tout endroit sur la Terre, on peut capter le signal d'au moins quatre satellites.

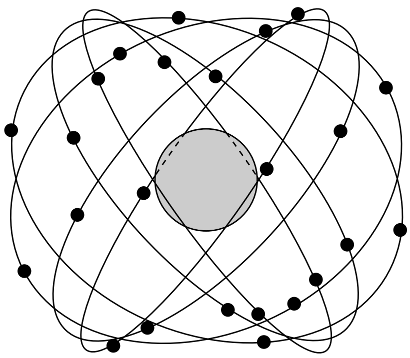

Fig. 1.1. Les 24 satellites sur six plans orbitaux

Les 24 satellites émettent des signaux répétés périodiquement. Les signaux sont captés à l'aide d'un récepteur. Lorsqu'on achète un GPS, on achète un récepteur qui captera le signal des satellites et calculera sa position. Le récepteur a en mémoire un almanach, lequel contient la position prévue des satellites à chaque instant. Cependant, comme des petites erreurs sur l'orbite sont inévitables, les corrections à apporter à la position du satellite sont codées dans le signal du satellite (la mise à jour de la position des satellites est faite toutes les heures). Chaque satellite émet son signal continûment. La période du signal est fixe, et les instants de début du cycle du signal sont inscrits dans l'almanach. Les satellites sont équipés d'horloges atomiques extrêmement précises permettant que le signal soit parfaitement en phase avec ce qui est annoncé dans l'almanach. Lorsque le récepteur capte le signal d'un satellite, il se met lui-même à générer les signaux des différents satellites et il les compare avec les signaux reçus. En général, les signaux ne concordent pas. Il translate alors les signaux qu'il génère jusqu'à ce qu'un des signaux qu'il génère soit en accord parfait avec le signal reçu (il mesure ceci en calculant la corrélation entre les deux signaux). Il peut alors calculer le temps de parcours du signal depuis le satellite. On discutera ceci en détail dans la section 1.4.

On décrira ci-dessous le fonctionnement d'un GPS commun. Son algorithme de calcul lui permet de déterminer la position du récepteur à 20 mètres près. La précision de la mesure a été brouillée jusqu'en mai 2000 par département de la Défense des États-Unis, si bien qu'on obtenait seulement une précision de 100 mètres au lieu des 20 mètres possibles par le système de mesure décrit ci-dessous.

1.2.2 La théorie du GPS

Comment le récepteur calcule-t-il sa position ? Nous ferons tout d'abord l'hypothèse que les horloges de tous les satellites et du récepteur sont parfaitement synchronisées. Le récepteur calcule sa position par triangulation. Le principe de base de toute méthode de triangulation est que, pour calculer la position d'un objet ou d'une personne, on décrit des caractéristiques de sa position (une distance, un angle, etc.) par rapport à des objets dont la position est connue. Dans le cas d'un récepteur GPS, les objets dont la position est connue sont les satellites. Voyons le détail :

- Le récepteur mesure le temps t_1 mis par le signal émis par un premier satellite P_1 pour parcourir la distance qui le sépare du satellite. Étant donné que le signal voyage à la vitesse de la lumière c, le récepteur calcule la distance

  $$r_1 = ct_1$$

  entre le récepteur et le satellite P_1. L'ensemble des points de l'espace situés à la distance r_1 du satellite P_1 est la sphère S_1 centrée en P_1 de rayon r_1. On sait donc que le récepteur est situé sur la sphère S_1. Prenons un système cartésien de coordonnées. Soient (x, y, z) la position (inconnue) du récepteur et (a_1, b_1, c_1) la position (connue) du satellite P_1. Alors (x, y, z) satisfait l'équation des points de la sphère de centre (a_1, b_1, c_1) et de rayon r_1 à savoir

  $$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2 = r_1^2 = c^2 t_1^2. \tag{1.1}$$

- Cette donnée ne suffit pas à connaître précisément la position du récepteur. Le récepteur capte donc le signal d'un deuxième satellite P_2, mesure son temps de parcours t_2 et en déduit la distance $r_2 = ct_2$ de P_2 au récepteur. Comme précédemment, on peut en déduire que le récepteur se trouve sur la sphère S_2 centrée en P_2 de rayon r_2. En supposant que le deuxième satellite est situé au point (a_2, b_2, c_2), alors (x, y, z) satisfait l'équation des points de la sphère de centre (a_2, b_2, c_2) et de rayon r_2 à savoir

$$(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + (z - c_2)^2 = r_2^2 = c^2 t_2^2. \tag{1.2}$$

  On a progressé, car deux sphères s'intersectent sur un cercle : on connaît maintenant un cercle $C_{1,2}$ sur lequel se trouve le récepteur, mais cela ne suffit pas à connaître précisément la position du récepteur.
- Pour que le récepteur puisse calculer complètement sa position, il suffit qu'il capte le signal d'un troisième satellite P_3 et mesure son temps de parcours t_3. Alors, le récepteur est situé sur la sphère S_3 centrée en P_3 de rayon $r_3 = ct_3$. Si (a_3, b_3, c_3) sont les coordonnées de P_3, alors (x, y, z) satisfait l'équation des points de la sphère de centre (a_3, b_3, c_3) et de rayon r_3 à savoir

$$(x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = r_3^2 = c^2 t_3^2. \tag{1.3}$$

  Le récepteur est donc sur l'intersection du cercle $C_{1,2}$ et de la sphère S_3. Un cercle et une sphère s'intersectant en deux points, il semblerait qu'il nous manque encore de l'information pour connaître exactement la position du récepteur. Fort heureusement, il n'en est rien. En effet, la position des satellites est arrangée pour que l'une des deux solutions soit complètement irréaliste parce que très loin de la surface de la Terre. En cherchant les deux solutions du système $(\star)$ d'équations formé des équations (1.1), (1.2), (1.3) et en éliminant la solution irréaliste, le récepteur a déterminé précisément sa position.

La solution du système $(\star)$ Les équations du système $(\star)$ sont quadratiques (non linéaires), ce qui complique la solution. On peut cependant remarquer que, si on soustrait à une des équations de $(\star)$ une deuxième équation de $(\star)$, on obtient une équation linéaire, car les termes en x^2, y^2 et z^2 s'annulent. On remplace donc le système $(\star)$ par un système équivalent obtenu en gardant la troisième équation et en remplaçant la première équation par (1.1)−(1.3) et la seconde par (1.2)−(1.3). On obtient le système

$$\begin{array}{rcl} 2(a_3 - a_1)x + 2(b_3 - b_1)y + 2(c_3 - c_1)z &=& A_1, \\ 2(a_3 - a_2)x + 2(b_3 - b_2)y + 2(c_3 - c_2)z &=& A_2, \\ (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2 + (z - c_3)^2 = r_3^2 &=& c^2 t_3^2, \end{array} \tag{1.4}$$

où

$$\begin{array}{rcl} A_1 &=& c^2(t_1^2 - t_3^2) + (a_3^2 - a_1^2) + (b_3^2 - b_1^2) + (c_3^2 - c_1^2), \\ A_2 &=& c^2(t_2^2 - t_3^2) + (a_3^2 - a_2^2) + (b_3^2 - b_2^2) + (c_3^2 - c_2^2). \end{array} \tag{1.5}$$

Les satellites sont disposés de telle sorte que jamais trois d'entre eux ne sont alignés. Ceci garantit qu'au moins un des trois déterminants 2×2

$$\begin{vmatrix} a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \\ a_3 - a_2 & b_3 - b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_3 - a_1 & c_3 - c_1 \\ a_3 - a_2 & c_3 - c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_3 - b_1 & c_3 - c_1 \\ b_3 - b_2 & c_3 - c_2 \end{vmatrix},$$

est non nul. En effet, si ces trois déterminants sont nuls, alors les vecteurs $(a_3 - a_1, b_3 - b_1, c_3 - c_1)$ et $(a_3 - a_2, b_3 - b_2, c_3 - c_2)$ sont collinéaires (leur produit vectoriel est nul), c'est-à-dire que les trois points P_1, P_2 et P_3 sont alignés.

Supposons, par exemple, que le premier déterminant soit non nul. En utilisant la règle de Cramer, on peut tirer x et y en fonction de z dans les deux premières équations de (1.4) :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} A_1 - 2(c_3 - c_1)z & 2(b_3 - b_1) \\ A_2 - 2(c_3 - c_2)z & 2(b_3 - b_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_3 - a_1) & 2(b_3 - b_1) \\ 2(a_3 - a_2) & 2(b_3 - b_2) \end{vmatrix}}, \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 2(a_3 - a_1) & A_1 - 2(c_3 - c_1)z \\ 2(a_3 - a_2) & A_2 - 2(c_3 - c_2)z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_3 - a_1) & 2(b_3 - b_1) \\ 2(a_3 - a_2) & 2(b_3 - b_2) \end{vmatrix}}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

En remplaçant x et y par ces valeurs dans la troisième équation de (1.4), on obtient une équation quadratique en z dont on peut calculer les deux solutions z_1 et z_2. En remplaçant z successivement par z_1 et z_2 dans (1.6), on obtient les valeurs correspondantes x_1, x_2 et y_1, y_2. Un logiciel de manipulations symboliques peut facilement donner les formules, mais ces formules sont trop grosses pour avoir quelque intérêt.

Un choix d'axes de coordonnées Nulle part dans le calcul précédent n'avons-nous eu à choisir explicitement le système d'axes. Mais, pour faire le lien avec la position exprimée à l'aide de la longitude, la latitude et l'altitude, nous faisons le choix suivant :

- le centre des coordonnées est le centre de la Terre ;
- l'axe z passe par les pôles et est orienté vers le pôle Nord ;
- les axes x et y sont dans le plan de l'équateur ;
- le demi-axe x positif (respectivement demi-axe y positif) pointe à la longitude 0 (respectivement 90 degrés ouest).

Le rayon de la Terre étant R (R est environ 6365 km), une solution (x_i, y_i, z_i) est acceptable si $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \approx (6365 \pm 50)^2$. L'incertitude de 50 km permet de pallier largement l'altitude en montagne ou pour un avion. Des coordonnées naturelles sur la Terre sont données par la longitude L, la latitude l et la distance h au centre de la Terre (l'altitude par rapport au niveau de la mer est alors $h - R$). La longitude et la latitude sont des angles que l'on va mesurer en degrés. Si un point (x, y, z) est sur la sphère de rayon R, c'est-à-dire à l'altitude 0, alors sa longitude et sa latitude sont obtenues en résolvant le système d'équations

$$
\begin{aligned}
x &= R\cos L\cos l,\\
y &= R\sin L\cos l,\\
z &= R\sin l.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Comme $l \in [-90\,°, 90\,°]$, on obtient

$$
l = \arcsin\frac{z}{R}, \tag{1.8}
$$

ce qui permet de calculer $\cos l$. La longitude L est alors uniquement déterminée par les deux équations :

$$
\begin{cases}
\cos L = \dfrac{x}{R\cos l},\\[2ex]
\sin L = \dfrac{y}{R\cos l}.
\end{cases}
\tag{1.9}
$$

Calcul de la position du récepteur Soit (x, y, z) la position du récepteur. On commence par calculer sa distance h au centre de la Terre. Celle-ci est donnée par

$$
h = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.
$$

On a maintenant deux choix pour calculer sa latitude et sa longitude : adapter les formules (1.8) et (1.9) en remplaçant R par h ou encore, dire que le récepteur a la même longitude et latitude que sa projection sur la sphère correspondant au niveau de la mer, à savoir le point :

$$
(x_0, y_0, z_0) = \left(x\frac{R}{h}, y\frac{R}{h}, z\frac{R}{h}\right).
$$

L'altitude du récepteur est $h - R$.

1.2.3 L'adaptation aux contraintes pratiques

Nous venons de présenter la théorie. Malheureusement, en pratique, les choses sont un peu plus compliquées, car les temps mesurés sont très petits, et il faut donc faire des mesures très précises. Les satellites sont équipés d'horloges atomiques très coûteuses et parfaitement synchronisées alors que le récepteur a une horloge de qualité moindre, ce qui lui permet d'être à la portée de toutes les bourses. Cette horloge de moindre qualité peut quand même calculer le temps de parcours du signal de manière adéquate, mais elle ne peut rester synchronisée avec les horloges des satellites. Comment contourne-t-on la difficulté ? Auparavant, nous avions trois inconnues x, y, z. Pour les trouver, nous avons donc eu besoin de mesurer trois quantités t_1, t_2 et t_3. Maintenant, notre récepteur mesure bien des temps T_1, T_2 et T_3, mais ce sont des temps de parcours fictifs, car le récepteur ne sait pas si son horloge est synchronisée avec celle des satellites. Le temps T_i mesuré par le récepteur est donc donné par

$$\begin{aligned} T_i \quad = \quad & \text{(heure d'arrivée du signal sur l'horloge du récepteur)} \\ & \quad - \text{(heure de départ du signal sur l'horloge du satellite).} \end{aligned}$$

La solution vient du fait que l'erreur entre les temps de parcours réels t_i et les temps de parcours fictifs T_i est la même pour chaque satellite : $T_i = \tau + t_i$, $i = 1, 2, 3$, où

$$\begin{aligned} t_i \quad = \quad & \text{(heure d'arrivée du signal sur l'horloge du satellite)} \\ & \quad - \text{(heure de départ du signal sur l'horloge du satellite)} \end{aligned}$$

et τ est donné par

$$\begin{aligned} \tau \quad = \quad & \text{(heure d'arrivée du signal sur l'horloge du récepteur)} \\ & \quad - \text{(heure d'arrivée du signal sur l'horloge du satellite).} \end{aligned} \tag{1.10}$$

La constante τ ainsi calculée est le décalage entre l'horloge des satellites et l'horloge du récepteur. C'est une quatrième inconnue, τ, qui s'ajoute aux trois inconnues x, y, z, que sont les coordonnées de la position du récepteur. Pour obtenir un nombre fini de solutions pour un système à quatre inconnues, il nous faut en général quatre équations. Il est très simple d'obtenir une quatrième équation : le récepteur mesure un quatrième temps de parcours (fictif) T_4 du signal émis par un quatrième satellite P_4. En notant que pour $i = 1, \dots, 4$, on a $t_i = T_i - \tau$, on a donc le système

$$\begin{aligned} (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 &= c^2(T_1-\tau)^2, \\ (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-c_2)^2 &= c^2(T_2-\tau)^2, \\ (x-a_3)^2 + (y-b_3)^2 + (z-c_3)^2 &= c^2(T_3-\tau)^2, \\ (x-a_4)^2 + (y-b_4)^2 + (z-c_4)^2 &= c^2(T_4-\tau)^2, \end{aligned} \tag{1.11}$$

aux quatre inconnues x, y, z, τ. Dans ce système, on peut, comme précédemment, faire des opérations élémentaires permettant de remplacer trois des équations quadratiques par des équations linéaires. Pour ce faire, on soustrait la quatrième équation à chacune des trois premières. On obtient le système équivalent :

$$\begin{aligned} 2(a_4-a_1)x + 2(b_4-b_1)y + 2(c_4-c_1)z &= 2c^2\tau(T_4-T_1) + B_1, \\ 2(a_4-a_2)x + 2(b_4-b_2)y + 2(c_4-c_2)z &= 2c^2\tau(T_4-T_2) + B_2, \\ 2(a_4-a_3)x + 2(b_4-b_3)y + 2(c_4-c_3)z &= 2c^2\tau(T_4-T_3) + B_3, \\ (x-a_4)^2 + (y-b_4)^2 + (z-c_4)^2 &= c^2(T_4-\tau)^2, \end{aligned} \tag{1.12}$$

où

$$\begin{aligned} B_1 &= c^2(T_1^2 - T_4^2) + (a_4^2 - a_1^2) + (b_4^2 - b_1^2) + (c_4^2 - c_1^2), \\ B_2 &= c^2(T_2^2 - T_4^2) + (a_4^2 - a_2^2) + (b_4^2 - b_2^2) + (c_4^2 - c_2^2), \\ B_3 &= c^2(T_3^2 - T_4^2) + (a_4^2 - a_3^2) + (b_4^2 - b_3^2) + (c_4^2 - c_3^2). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Dans le système (1.12), la règle de Cramer appliquée aux trois premières équations permet de tirer x, y, z en fonction de τ :

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\begin{vmatrix} 2c^2\tau(T_4-T_1)+B_1 & 2(b_4-b_1) & 2(c_4-c_1) \\ 2c^2\tau(T_4-T_2)+B_2 & 2(b_4-b_2) & 2(c_4-c_2) \\ 2c^2\tau(T_4-T_3)+B_3 & 2(b_4-b_3) & 2(c_4-c_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_4-a_1) & 2(b_4-b_1) & 2(c_4-c_1) \\ 2(a_4-a_2) & 2(b_4-b_2) & 2(c_4-c_2) \\ 2(a_4-a_3) & 2(b_4-b_3) & 2(c_4-c_3) \end{vmatrix}}, \\
y &= \frac{\begin{vmatrix} 2(a_4-a_1) & 2c^2\tau(T_4-T_1)+B_1 & 2(c_4-c_1) \\ 2(a_4-a_2) & 2c^2\tau(T_4-T_2)+B_2 & 2(c_4-c_2) \\ 2(a_4-a_3) & 2c^2\tau(T_4-T_3)+B_3 & 2(c_4-c_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_4-a_1) & 2(b_4-b_1) & 2(c_4-c_1) \\ 2(a_4-a_2) & 2(b_4-b_2) & 2(c_4-c_2) \\ 2(a_4-a_3) & 2(b_4-b_3) & 2(c_4-c_3) \end{vmatrix}}, \qquad (1.14) \\
z &= \frac{\begin{vmatrix} 2(a_4-a_1) & 2(b_4-b_1) & 2c^2\tau(T_4-T_1)+B_1 \\ 2(a_4-a_2) & 2(b_4-b_2) & 2c^2\tau(T_4-T_2)+B_2 \\ 2(a_4-a_3) & 2(b_4-b_3) & 2c^2\tau(T_4-T_3)+B_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(a_4-a_1) & 2(b_4-b_1) & 2(c_4-c_1) \\ 2(a_4-a_2) & 2(b_4-b_2) & 2(c_4-c_2) \\ 2(a_4-a_3) & 2(b_4-b_3) & 2(c_4-c_3) \end{vmatrix}}.
\end{aligned}$$

Ceci n'a de sens que si le dénominateur est non nul. Or, le dénominateur est nul si et seulement si les quatre satellites sont situés dans un même plan (voir l'exercice 1). Lorsqu'on dispose les satellites sur leurs orbites, il faut donc s'assurer qu'en aucun instant, on ne puisse avoir quatre satellites visibles d'un même point de la Terre et situés dans un même plan. On remplace les solutions de (1.14) dans la quatrième équation du système (1.12). On obtient une solution quadratique en τ qui admet deux racines τ_1 et τ_2. On remplace ces valeurs dans (1.14), ce qui nous donne deux ensembles de valeurs (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) pour la position du récepteur. On élimine la valeur irréaliste.

Quels satellites doit choisir le récepteur s'il en capte plus de quatre ? Dans ce cas, le récepteur a le choix des données qu'il va utiliser pour calculer sa position. Pour cela, il doit choisir les satellites avec lesquels l'erreur de calcul sera minimale. En effet, les temps de parcours des signaux sont approximatifs. Cela signifie que les distances des satellites au récepteur ne sont connues qu'approximativement. Graphiquement, on peut représenter la région d'incertitude en épaississant la surface de la sphère. L'intersection des sphères épaissies est un ensemble dont la taille est reliée à l'incertitude sur la solution. On peut facilement se convaincre que plus l'angle avec lequel les sphères se coupent est grand, plus la zone d'incertitude est petite. Au contraire, plus les sphères s'intersectent tangentiellement, plus la zone d'incertitude est grande. On a donc avantage à choisir les satellites qui sont les centres de sphères S_i se coupant avec le plus grand angle possible (figure 1.2).

C'est la manière géométrique de voir les choses. Algébriquement on voit que les valeurs de x, y, z en fonction de τ dans (1.14) sont obtenues en divisant par

Fig. 1.2. Petit angle à gauche (perte de précision) et grand angle à droite

$$\begin{vmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2(b_4 - b_1) & 2(c_4 - c_1) \\ 2(a_4 - a_2) & 2(b_4 - b_2) & 2(c_4 - c_2) \\ 2(a_4 - a_3) & 2(b_4 - b_3) & 2(c_4 - c_3) \end{vmatrix}.$$

Plus ce dénominateur est petit, plus les erreurs sont accentuées dans le calcul. On a donc intérêt à choisir des satellites pour lesquels ce dénominateur est maximal.

Des sujets plus avancés peuvent être étudiés dans le cadre d'un projet.

Quelques exemples de raffinements

- **GPS différentiels (DGPS)** Une source d'imprécision vient du fait que les calculs utilisent la constante c qui est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide. En pratique une onde électromagnétique est défléchie par l'atmosphère, ce qui allonge sa trajectoire et son temps de parcours. Pour obtenir une meilleure approximation de la vitesse du signal le long de sa trajectoire, on utilise un système de GPS différentiels. On compare le temps de parcours du signal du satellite au récepteur à celui du temps de parcours du même satellite à un deuxième récepteur situé dans la même région et dont la position est connue. Ceci permet de calculer la vitesse de propagation du signal puisque celui-ci ne voyage pas dans le vide. On peut augmenter alors la précision des mesures à l'ordre du centimètre.
- Le signal envoyé par chaque satellite est un signal aléatoire, mais qui est répété à des intervalles réguliers parfaitement connus. La période est relativement courte, si bien qu'en une période, le signal parcourt seulement quelques centaines de kilomètres. Quand le récepteur reçoit le début d'une période du signal du satellite, il lui faut déterminer à quel moment ce début de période a été envoyé. A priori on a une incertitude d'un nombre entier de périodes.
- **GPS en mouvement rapide** Installer des GPS sur des objets en mouvement rapide (par exemple, un avion) et les faire calculer en temps réel constitue une application naturelle : si un avion doit par exemple atterrir dans le brouillard, il doit connaître sa position précise à chaque instant, et le temps de calcul de la position doit être réduit au minimum.

- La Terre n'est pas sphérique ! La Terre n'est pas exactement une sphère, mais plutôt un ellipsoïde aplati aux pôles. Son rayon est de 6356 km aux pôles et de 6378 km à l'équateur. Il faut ajuster les coordonnées de longitude, de latitude et d'altitude dans lesquelles on transforme les coordonnées (x, y, z).
- **Corrections relativistes** Les vitesses des satellites sont suffisamment importantes pour qu'il faille apporter aux calculs précédents des corrections, prenant en compte la théorie de la relativité restreinte. En effet, les horloges des satellites sont en mouvement rapide par rapport aux horloges terrestres. La théorie de la relativité restreinte prédit donc qu'elles sont au ralenti par rapport aux horloges terrestres. D'autre part, les satellites sont au voisinage de la Terre, qui a une masse importante. La relativité générale prévoit dans ce cas une accélération des horloges des satellites. Dans un premier temps, on peut assimiler la Terre à un objet massif, sphérique, non en rotation et sans charge électrique. Alors, le calcul se fait relativement aisément à l'aide de la métrique de Schwarzschild, qui décrit l'effet de la relativité générale sous ces hypothèses simplificatrices. Il se trouve que cette simplification suffit pour obtenir une bonne localisation du récepteur. Les deux effets de la relativité restreinte et de la relativité générale vont en sens contraire l'un de l'autre, mais ils ne se compensent que partiellement, et on ne peut donc se passer d'une correction relativiste aux calculs précédents pour obtenir une localisation adéquate du récepteur. Plus de détails dans [6].

Applications du GPS Elles sont nombreuses. En voici quelques-unes :

- Un récepteur GPS permet de retrouver son chemin dans la nature. C'est utile pour les randonneurs, les navigateurs à voile, les kayakistes de mer, etc. Le récepteur permet d'enregistrer des points repères. On enregistre un point repère, soit au moment où on passe sur le point, auquel cas le récepteur a calculé sa position, soit en rentrant ses coordonnées prises sur une carte. En joignant des points repères par des segments de droite, on peut enregistrer des « routes ». Le récepteur peut ensuite afficher sur son écran notre position par rapport à ces points repères ou nous diriger pour suivre une route. Parmi les options plus avancées, on peut aussi installer dans le récepteur des banques de cartes topographiques. Le récepteur affiche alors une portion de la carte sur son écran et sa propre position sur la carte. Il peut aussi afficher sur la carte les points repères et les routes que l'on a préalablement enregistrés.
- De plus en plus de véhicules, principalement des taxis, sont munis de GPS pour aider à trouver une adresse. Il existe en Europe de l'Ouest et en Amérique du Nord des logiciels fonctionnant avec un GPS et donnant les instructions pour trouver presque n'importe quelle adresse.
- Vous êtes muni d'une ancienne carte topographique sur laquelle le chemin que nous parcourez n'est pas inscrit ? Parcourez le chemin avec votre GPS ouvert qui enregistre votre trajet et branchez-vous ensuite sur un ordinateur avec un logiciel approprié : vous pourrez superposer le tracé du chemin parcouru sur votre carte. Si vous ne disposez pas d'une carte numérisée vous pouvez télécharger votre carte

papier et rentrer les coordonnées de trois points non alignés de la carte, ce qui permet au logiciel de munir la carte d'un système de coordonnées (voir exercice 5).
- La présence de GPS dans les avions a permis de réduire la largeur des couloirs aériens.
- Le système GPS permet de suivre à la trace la position des véhicules d'une flotte de véhicules de livraison. Par exemple, les taxis parisiens sont gérés par GPS. Dans ces applications, il faut coupler le récepteur GPS à un émetteur : par exemple, un GSM (*Global System for Mobile Communications*). Un tel système est aussi utilisé pour suivre des animaux sauvages à la trace dans des études environnementales. Et on voit tout de suite les atteintes possibles à la vie privée lorsqu'une compagnie de location d'autos décide de cacher un GPS-GSM dans un véhicule loué pour vérifier si le client respecte les limites de territoire apparaissant au contrat !
- On développe des systèmes pour aider les non-voyants à se localiser.
- Les géographes se servent du système GPS pour mesurer la croissance du mont Everest : en effet, ce dernier continue à croître au fur et à mesure que son glacier, le Khumbu, descend. Tous les deux ans, des expéditions munies de GPS mettent aussi à jour l'altitude officielle du mont Blanc. De plus, il y a quelques années, les géographes se sont demandé si le K2 n'était pas plus élevé que l'Everest. Grâce au GPS utilisé lors de l'expédition géographique de 1998, le débat est définitivement clos, et on sait de manière certaine que l'Everest est la plus haute montagne du globe. Il s'élève à 8830 mètres. Le calcul effectué en 1954 par B. L. Gulatee avait conclu à une hauteur de 8848 mètres. Les mesures avaient été effectuées à l'époque à partir de six stations dans la plaine indienne en utilisant un théodolite (appareil utilisé en géodésie, muni d'une lunette et servant à mesurer les angles).
- Il y a bien sûr les applications militaires lorsque le GPS est utilisé pour téléguider des bombes.

Le futur : GPS et Galileo Jusqu'à maintenant, les Américains ont occupé seuls ce marché qu'ils contrôlent totalement. Ils peuvent donc décider, si nécessaire, de brouiller les signaux accessibles dans une région pour des raisons militaires (programme NAVWAR pour *Navigational Warfare*). Les Européens ont donc lancé le 26 mars 2002 la phase de développement et de validation de Galileo, un système destiné à concurrencer le GPS. Deux satellites ont été déployés en 2005, et l'ensemble des satellites devrait être déployé en 2010. Le GPS dans sa forme actuelle ne diffuse pas d'information sur l'intégrité des signaux émis. Il peut s'écouler quelques heures avant que l'on ne réalise qu'un satellite est tombé en panne, avec les conséquences que l'on peut imaginer. En particulier, on n'ose pas se fier complètement au système GPS pour piloter un avion dans le brouillard. Avec Galileo, un message d'intégrité accompagnera chaque signal émis et préviendra le récepteur de ne pas utiliser un message faussé en raison du mauvais fonctionnement d'un satellite. Ceci sera effectué à l'aide d'un réseau de stations de surveillance qui vérifieront si la position réelle des satellites est bien celle qu'elles calculent en utilisant le signal du satellite. Cette information sera renvoyée rapidement aux satellites, qui la diffuseront aux usagers comme partie du signal. Les Américains espèrent aussi introduire une telle amélioration pour le système GPS.

1.3 Gestion des coups de foudre à Hydro-Québec

De nouvelles solutions à certains problèmes techniques apparaissent souvent lorsqu'une nouvelle technologie devient disponible. La gestion des coups de foudre à Hydro-Québec[1] repose aujourd'hui partiellement sur l'existence du système GPS. Mais, comme c'est souvent le cas, les mathématiques interviennent à plus d'un endroit dans cette méthode de gestion des coups de foudre. Ainsi, cette section n'est pas seulement l'étude d'une application (inattendue) du GPS, mais l'étude de quelques-unes des méthodes mathématiques intervenant dans ce problème technique.

1.3.1 La localisation des coups de foudre

Hydro-Québec a installé en 1992 un système de localisation des coups de foudre sur son territoire. La problématique globale consiste à circonscrire les zones orageuses de manière à diminuer le transit sur les lignes électriques situées dans ces zones et à rediriger le transit sur d'autres lignes. On atténue ainsi l'impact potentiel de la perte de lignes : en cas de pannes causées par la foudre tombant sur une ligne électrique, le nombre d'abonnés touchés est alors minimal, et la fiabilité du réseau, augmentée.

Pour cela, Hydro-Québec utilise un système de 13 détecteurs répartis dans les deux tiers sud de la province de Québec, soit le territoire couvert par des lignes électriques. Leur position est connue, mais, comme on doit mesurer des temps très précis, tous les détecteurs doivent être parfaitement synchronisés. Ils utilisent pour cela chacun un récepteur GPS.

Le récepteur GPS : une référence de temps Cela peut paraître un peu surprenant. Nous avons justement noté le fait qu'un récepteur GPS est muni d'une horloge peu coûteuse et donc, peu précise. Mais nous avons aussi vu que, pour calculer sa position, le récepteur GPS solutionne le système (1.11) de quatre équations aux quatre inconnues x, y, z, τ. Lorsqu'il a solutionné le système, il connaît donc τ, qui est le décalage entre son horloge interne et l'horloge des satellites. Il peut donc calculer l'heure exacte, et l'heure qu'il affiche est en fait l'heure des satellites. Le récepteur GPS calcule une position à quelques mètres près, avec une imprécision correspondante dans le calcul du décalage. On peut améliorer la précision quand le récepteur est stationnaire. On remplace les valeurs calculées x, y, z et τ par les moyennes de plusieurs valeurs calculées $(x_i, y_i, z_i, \tau_i)_{i=1}^N$ à différents temps. En effet, il y a une erreur dans chaque calcul (x_i, y_i, z_i, τ_i). Les erreurs dans l'espace peuvent être dans n'importe quelle direction, et

[1] Hydro-Québec est le plus grand producteur, transporteur et distributeur d'électricité dans la province de Québec. Son nom s'explique par le fait que plus de 95 % de l'électricité produite est d'origine hydraulique.