

Ces règles se démontrent facilement. Par exemple, si $x < n$, alors $\lfloor x \rfloor < n$ car $\lfloor x \rfloor \leq x$. Inversement, si $\lfloor x \rfloor < n$, alors nécessairement $x < n$ puisque $x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor x \rfloor + 1 \leq n$.

On aimerait bien que les quatre règles de (3.7) soient aussi faciles à retenir qu'à prouver. Chaque inégalité sans partie entière correspond à la même inégalité avec une partie entière inférieure ou supérieure ; mais il faut réfléchir à deux fois avant de décider laquelle des deux est appropriée.

La différence entre x et $\lfloor x \rfloor$ s'appelle la *partie fractionnaire* de x . Elle apparaît assez souvent pour qu'on lui attribue une notation spécifique :

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor. \quad (3.8)$$

On peut se permettre de dire simplement "partie entière" pour la partie entière inférieure $\lfloor x \rfloor$, car $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$. Si un nombre réel peut s'écrire sous la forme $x = n + \theta$ où n est un entier et $0 \leq \theta < 1$, alors (3.5(a)) nous permet de conclure que $n = \lfloor x \rfloor$ et $\theta = \{x\}$.

L'égalité (3.6) n'est pas vérifiée si n est un réel quelconque. Mais on peut déduire de ce qui précède qu'il y a seulement deux valeurs possibles pour l'expression $\lfloor x + y \rfloor$: si on écrit $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ et $y = \lfloor y \rfloor + \{y\}$, alors on a $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor \{x\} + \{y\} \rfloor$; et comme $0 \leq \{x\} + \{y\} < 2$, on trouve que $\lfloor x + y \rfloor$ peut être égal soit à $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ is $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$, soit à $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Hum. Il vaut mieux éviter d'écrire $\{x\}$ pour la partie fractionnaire quand on peut la confondre avec l'ensemble réduit à x .

Le second cas arrive si et seulement s'il y a une retenue au niveau du point décimal quand on additionne les deux parties fractionnaires $\{x\}$ et $\{y\}$.

3.2 APPLICATIONS

Nous venons de voir les outils de base pour manipuler les parties entières inférieure et supérieure. Mettons les maintenant en pratique, en commençant par un problème facile. Combien vaut $\lceil \lg 35 \rceil$ (nous utilisons "lg" pour le logarithme en base 2, suivant en cela une prescription d'Edward M. Reingold) ? Eh bien, puisque $2^5 < 35 \leq 2^6$, on peut appliquer le logarithme pour trouver $5 < \lg 35 \leq 6$; donc, d'après la relation (3.5(c)), on a $\lceil \lg 35 \rceil = 6$.

Notez que le nombre 35 s'écrit en base deux avec six bits : $35 = (100011)_2$. Peut-on dire que $\lceil \lg n \rceil$ est toujours la longueur de l'écriture binaire de n ? Pas tout à fait. Il faut aussi six bits pour écrire $32 = (100000)_2$; donc $\lceil \lg n \rceil$ n'est pas la bonne réponse (il est vrai qu'elle n'échoue que lorsque n est une puissance de 2, mais ça fait quand même un nombre infini d'échecs). On peut trouver une réponse correcte en réalisant qu'il faut m bits pour écrire tout nombre n tel que $2^{m-1} \leq n < 2^m$; alors (3.5(a)) nous indique que $m - 1 = \lfloor \lg n \rfloor$, et donc $m = \lfloor \lg n \rfloor + 1$. En d'autres termes, il faut $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ bits pour écrire un nombre n en binaire, pour tout $n > 0$. L'expression $\lceil \lg(n + 1) \rceil$ est une autre solution, que l'on peut trouver de façon similaire. Cette dernière formule étant valable aussi pour $n = 0$, on peut dire qu'il faut zéro bit pour écrire $n = 0$ en binaire.

Examinons maintenant des expressions avec plusieurs parties entières inférieure ou supérieure. Combien vaut $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil$? Facile : comme $\lfloor x \rfloor$ est entier, $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil$ est tout simplement égal à $\lfloor x \rfloor$. Il en est ainsi de toute expression contenant un $\lfloor x \rfloor$ intérieur, encadré par n'importe quel nombre de parties entières inférieures ou supérieures.

Voyons un problème plus ardu : démontrer ou réfuter l'assertion

$$\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor, \quad x \geq 0 \text{ réel.} \quad (3.9)$$

L'égalité est évidente si x est entier, car $x = \lfloor x \rfloor$. Il y a aussi égalité pour les cas particuliers $\pi = 3,14159\dots$, $e = 2,71828\dots$ et $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1,61803\dots$, car on obtient $1 = 1$. Notre incapacité à trouver un contre-exemple suggère que l'égalité est vraie en général. Essayons donc de la prouver.

Soit dit en passant, quand on se trouve face à un "démontrer ou réfuter", il est généralement préférable d'essayer d'abord de réfuter avec un contre-exemple. C'est vrai pour deux raisons : d'une part il est a priori plus facile de réfuter (un contre-exemple suffit) ; d'autre part, le fait de chercher des poux dans une formule fait travailler notre imagination. Même si l'assertion donnée est vraie, la recherche d'un contre-exemple mène souvent à une preuve, dès lors que l'on voit pourquoi un contre-exemple est impossible. En outre, le scepticisme est une saine attitude.

Essayons de prouver que $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ en utilisant le calcul infinitésimal. Commençons par décomposer x en ses parties entière et fractionnaire $\lfloor x \rfloor + \{x\} = n + \theta$, puis développons la racine carrée en utilisant la formule du binôme : $(n + \theta)^{1/2} = n^{1/2} + n^{-1/2}\theta/2 - n^{-3/2}\theta^2/8 + \dots$. C'est une méthode pas très propre.

Il est bien plus facile d'utiliser les outils que nous avons développés. Voici une stratégie possible : trouver un moyen de sortir la partie entière inférieure la plus extérieure et la racine carrée de $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$, puis supprimer la partie entière intérieure, enfin remettre en place la couche extérieure pour obtenir $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$. Bon, allons-y. Prenons $m = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$ et invoquons (3.5(a)) ; cela nous donne $m \leq \sqrt{\lfloor x \rfloor} < m + 1$. Nous avons supprimé la partie entière extérieure sans perdre une seule information. Comme les trois expressions sont positives ou nulles, on obtient $m^2 \leq \lfloor x \rfloor < (m + 1)^2$ en élevant le tout au carré. Nous sommes débarrassés de la racine carrée. Maintenant, supprimons la partie entière inférieure en utilisant (3.7(d)) pour l'inégalité de gauche et (3.7(a)) pour celle de droite : $m^2 \leq x < (m + 1)^2$. C'est maintenant une simple formalité que de revenir sur nos pas, en prenant la racine carrée pour obtenir $m \leq \sqrt{x} < m + 1$, puis en invoquant (3.5(a)) pour avoir $m = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$. Ainsi $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = m = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$. L'assertion est donc vraie. On peut prouver de façon similaire que

$$\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil, \quad x \geq 0 \text{ réel.}$$

Bien sûr, π , e et ϕ sont évidemment les premiers réels qu'il faut tester. N'est-ce pas ?

Le scepticisme est sain seulement dans une certaine mesure. Être sceptique sur les preuves ou les programmes (particulièrement les vôtres) vous permet probablement de garder un esprit sain et d'effectuer un travail assez sûr. Cependant, si vous êtes sceptique à ce point, vous risquez fort de travailler sans arrêt, sans jamais sortir vous aérer ou vous relaxer. Trop de scepticisme peut mener à la rigidité, un état tel que l'on devient si préoccupé d'être correct et rigoureux que l'on ne peut jamais rien achever.

— Un sceptique

La preuve que nous venons de faire ne dépend pas fortement des propriétés des racines carrées. En regardant de plus près, on voit que l'idée peut être généralisée pour prouver plus encore : soit $f(x)$ une fonction continue, strictement croissante et satisfaisant la propriété

$$f(x) \text{ est entier} \implies x \text{ est entier.}$$

(Le symbole " $\implies$ " signifie "implique"). Alors on a

*(Cela a été remarqué
par R. J. McEliece,
quand il était en
licence).*

$$\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor \quad \text{et} \quad \lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil \quad (3.10)$$

dès lors que $f(x)$, $f(\lfloor x \rfloor)$ et $f(\lceil x \rceil)$ sont définies. Nous allons démontrer cette propriété générale pour les parties entières supérieures, parce que jusqu'à présent nous ne nous sommes occupés que des parties entières inférieures. La preuve pour les parties entières inférieures est quasiment identique. Si $x = \lceil x \rceil$, on n'a rien à prouver. Sinon $x < \lceil x \rceil$ et $f(x) < f(\lceil x \rceil)$ car f est strictement croissante. Donc $\lceil f(x) \rceil \leq \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$ car $\lceil \cdot \rceil$ est croissante. Si $\lceil f(x) \rceil < \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$, alors, du fait que f est continue, il existe un nombre y tel que $x \leq y < \lceil x \rceil$ et $f(y) = \lceil f(x) \rceil$. Ce nombre y est forcément entier en raison de la propriété particulière de f . Il y a là une contradiction, car il ne peut pas exister d'entier compris entre x et $\lceil x \rceil$ strictement. Donc on a forcément $\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$.

Voici un cas particulier important de ce théorème qui vaut la peine d'être écrit explicitement : si m est un entier et n un entier strictement positif, alors

$$\left\lfloor \frac{x+m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor \quad \text{et} \quad \left\lceil \frac{x+m}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lceil x \rceil + m}{n} \right\rceil. \quad (3.11)$$

Par exemple, si $m = 0$, on a $\lfloor \lfloor x/10 \rfloor / 10 \rfloor = \lfloor x/1000 \rfloor$. Diviser trois fois par 10 et éliminer le reste à chaque division revient exactement à diviser une fois par 1000 puis supprimer le reste après coup.

Essayons maintenant de démontrer ou réfuter une autre assertion :

$$\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rceil \stackrel{?}{=} \lceil \sqrt{x} \rceil, \quad x \geq 0 \text{ réel.}$$

Cela marche pour $x = \pi$ ou $x = e$, mais pas pour $x = \phi$; nous savons donc que l'assertion n'est pas vraie en général.

Avant d'aller plus loin, ouvrons une parenthèse pour passer en revue les différents niveaux de problèmes qui peuvent apparaître dans les livres de mathématiques :

Niveau 1. Etant donné un objet x et une propriété explicite $P(x)$, montrer que $P(x)$ est vraie. Par exemple, "montrez que $\lfloor \pi \rfloor = 3$ ". Le problème consiste donc à trouver une preuve d'un fait donné.

Niveau 2. Etant donné un ensemble X et une propriété $P(x)$, montrer que $P(x)$ est vraie pour tout $x \in X$. Par exemple, “montrez que $\lfloor x \rfloor \leq x$ pour tout réel x ”. Il s’agit encore de trouver une preuve, mais cette fois-ci elle doit être générale. C’est de l’algèbre, et non simplement de l’arithmétique.

Niveau 3. Etant donné un ensemble X et une propriété $P(x)$, prouver ou réfuter le fait que $P(x)$ est vraie pour tout $x \in X$. Par exemple “prouvez ou réfutez l’assertion suivante : $\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$ pour tout réel $x \geq 0$ ”. Il y a là un niveau d’incertitude supplémentaire : le résultat n’est pas suggéré par la question. Cette situation est plus proche de celles auxquelles les mathématiciens sont confrontés en permanence. Les assertions que l’on peut lire dans les livres sont vraies en général ; en revanche, les choses nouvelles doivent être étudiées d’un œil circonspect. Si l’assertion est fausse, notre travail consiste à trouver un contre-exemple. Si elle est vraie, il faut en trouver une preuve, tout comme au niveau 2.

Dans mes autres manuels, “prouvez ou réfutez” semble avoir le même sens que “prouvez” dans 99,44% des cas environ ; mais pas dans ce livre.

Niveau 4. Etant donné un ensemble X et une propriété $P(x)$, trouver une condition nécessaire et suffisante $Q(x)$ pour que $P(x)$ soit vraie. Par exemple, “donnez une condition nécessaire et suffisante pour que $\lfloor x \rfloor \geq \lceil x \rceil$ ”. Le problème consiste à trouver Q telle que $P(x) \iff Q(x)$. Bien entendu, il y a toujours une réponse triviale : on n’a qu’à prendre $P(x) = Q(x)$. Cependant, ce qui est implicitement demandé, c’est une condition aussi simple que possible. Il faut faire preuve de créativité pour trouver une condition simple qui conviendra. (par exemple, dans le cas présent, “ $\lfloor x \rfloor \geq \lceil x \rceil \iff x$ est entier”). L’élément supplémentaire qu’est l’imagination nécessaire pour trouver $Q(x)$ rend ce genre de problèmes plus difficile ; c’est aussi plus typique de ce que doivent faire les mathématiciens dans le “monde réel”. Pour finir, il faut évidemment donner une preuve du fait que $P(x)$ est vraie si et seulement si $Q(x)$ est vraie.

Niveau 5. Etant donné un ensemble X , trouver une propriété intéressante $P(x)$ satisfaite par ses éléments. Ici on entre dans le domaine effrayant de la recherche pure, où les étudiants pourraient penser qu’il règne un chaos total. Les vraies mathématiques sont là. Les auteurs de manuels osent rarement poser des problèmes de niveau 5.

Fermons la parenthèse. Toutefois, nous allons accorder une promotion la dernière question que nous avons étudiée : elle va passer du niveau 3 au niveau 4. Cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que $\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$. Nous avons vu qu’il y a égalité quand $x = 3,142$ mais pas quand $x = 1,618$; d’autres expériences montrent qu’il n’y a pas égalité non plus quand x est compris entre 9 et 10. Ah ! On voit que l’égalité est fausse quand $m^2 < x < m^2 + 1$, car cela donne m dans le membre gauche et $m + 1$ dans le membre droit. Dans tous les autres cas où $\sqrt{x}$ est défini, c’est-à-dire lorsque $x = 0$ ou $m^2 + 1 \leq x \leq (m + 1)^2$, il y a égalité. Voici donc une condition nécessaire et suffisante pour l’égalité : soit x est entier,

soit $\sqrt{[x]}$ ne l'est pas.

Avant d'étudier le problème suivant, nous allons voir une nouvelle notation bien pratique, suggérée par C. A. R. Hoare et Lyle Ramshaw, pour décrire les intervalles réels : $[\alpha.. \beta]$ désigne l'ensemble des nombres réels x tels que $\alpha \leq x \leq \beta$. On appelle cet ensemble un *intervalle fermé* car il contient les deux extrémités α et β . L'intervalle ne contenant aucune extrémité, que l'on note $(\alpha.. \beta)$, est l'ensemble des x tels que $\alpha < x < \beta$; c'est un *intervalle ouvert*. On définit de même les intervalles *semi-ouverts* $[\alpha.. \beta)$ et $(\alpha.. \beta]$, qui contiennent seulement une extrémité.

Ou semi-fermés pour les pessimistes.

Les lecteurs français sont peut-être plus familiarisés avec les notations $[\alpha, \beta]$, $]\alpha, \beta[$, $[\alpha, \beta[$, $]\alpha, \beta]$, pour les intervalles fermé, ouvert, semi-ouvert à droite et semi-ouvert à gauche respectivement (N.d.T.).

Combien y a-t-il d'entiers dans de tels intervalles ? La réponse est plus facile pour les intervalles semi-ouverts que pour les autres. Commençons donc par les premiers. En fait, il est presque toujours plus agréable de manipuler les intervalles semi-ouverts que les intervalles ouverts ou fermés. Par exemple, ils sont additifs, au sens qu'on peut combiner les deux intervalles semi-ouverts $[\alpha.. \beta)$ et $[\beta.. \gamma)$ pour obtenir le semi-ouvert $[\alpha.. \gamma)$. Ceci ne marcherait pas avec les intervalles ouverts, car le point β serait exclu du résultat ; et pour les intervalles fermés, des problèmes pourraient survenir du fait que β serait compté deux fois.

Revenons à notre problème. La réponse est évidente si α et β sont des entiers : $[\alpha.. \beta)$ contient les $\beta - \alpha$ entiers $\alpha, \alpha + 1, \dots, \beta - 1$, en supposant que $\alpha \leq \beta$. De la même manière, $(\alpha.. \beta]$ contient aussi $\beta - \alpha$ entiers. Mais notre problème est plus difficile car α et β sont des réels quelconques. On peut néanmoins se ramener au problème plus simple, car, d'après (3.7),

$$\begin{aligned} \alpha \leq n < \beta &\iff [\alpha] \leq n < [\beta], \\ \alpha < n \leq \beta &\iff [\alpha] < n \leq [\beta], \end{aligned}$$

lorsque n est un entier. Les intervalles de droite ont des extrémités entières et contiennent le même nombre d'entiers que ceux de gauche, qui ont des extrémités réelles. Ainsi l'intervalle $[\alpha.. \beta)$ contient exactement $[\beta] - [\alpha]$ entiers, tandis que $(\alpha.. \beta]$ en contient $[\beta] - [\alpha]$. Voici un cas où, au lieu d'essayer de nous débarrasser des crochets de partie entière, nous en introduisons à dessein.

Exactement comme on retient l'année du départ de Christophe Colomb vers l'Amérique en chantant "In fourteen hundred and ninety-three/ Columbus sailed the deep blue sea."

A propos, il y a un truc pour retenir dans quels cas il faut utiliser la partie entière inférieure ou la partie entière supérieure : on rencontre plus souvent des intervalles semi-ouverts à droite (comme $0 \leq \theta < 1$) que des intervalles semi-ouverts à gauche (comme $0 < \theta \leq 1$) ; de même, les parties entières inférieures sont plus répandues que les parties entières supérieures. Donc, en vertu de la Loi de Murphy, la règle à suivre est le contraire de ce à quoi on s'attend. Il faut donc utiliser la partie entière supérieure pour $[\alpha.. \beta)$ et la partie entière inférieure pour $(\alpha.. \beta]$.

Une réflexion similaire montre que l'intervalle fermé $[\alpha.. \beta]$ contient exactement $[\beta] - [\alpha] + 1$ entiers, tandis que l'intervalle ouvert $(\alpha.. \beta)$ en

contient $\lceil \beta \rceil - \lfloor \alpha \rfloor - 1$. Cependant, dans ce dernier cas, il faut ajouter la restriction $\alpha \neq \beta$ pour que la formule ne puisse nous embarrasser en prétendant que l'intervalle vide $(\alpha.. \alpha)$ contient -1 entiers. En résumé, nous avons établi les faits suivants :

intervalle	entiers contenus	restrictions	
$[\alpha.. \beta]$	$\lfloor \beta \rfloor - \lceil \alpha \rceil + 1$	$\alpha \leq \beta$,	
$[\alpha.. \beta)$	$\lfloor \beta \rfloor - \lceil \alpha \rceil$	$\alpha \leq \beta$,	(3.12)
$(\alpha.. \beta]$	$\lfloor \beta \rfloor - \lfloor \alpha \rfloor$	$\alpha \leq \beta$,	
$(\alpha.. \beta)$	$\lfloor \beta \rfloor - \lfloor \alpha \rfloor - 1$	$\alpha < \beta$.	

Voici maintenant un problème que nous ne pouvons refuser d'étudier. Le Club des Mathématiques Concrètes possède un casino (où seuls sont admis les acquéreurs de ce livre) dans lequel tourne une roulette contenant mille cases numérotées de 1 à 1000. Si le numéro n qui est tiré lors d'un jeu est divisible par la partie entière inférieure de sa racine cubique, c'est-à-dire si

$$\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor \mid n,$$

alors c'est un numéro gagnant et l'établissement donne 5 dollars à chaque joueur ; sinon, le numéro est perdant et chaque joueur paie 1 dollar. (La notation $a \mid b$, qui se dit "a divise b", signifie que b est un multiple de a ; cette relation est précisément étudiée au chapitre 4). Peut-on espérer gagner à ce jeu ?

On peut calculer le gain moyen, c'est-à-dire la somme qu'on gagne (ou qu'on perd) en moyenne lors d'une partie. Pour cela, on commence par compter le nombre W de numéros gagnants et le nombre $L = 1000 - W$ de numéros perdants. Si chaque numéro apparaît une fois au cours de 1000 parties, alors on gagne $5W$ dollars et on en perd L , donc le gain moyen sera

$$\frac{5W - L}{1000} = \frac{5W - (1000 - W)}{1000} = \frac{6W - 1000}{1000}.$$

(D'après un sondage effectué à ce moment dans la classe, 28 étudiants pensent qu'il vaut mieux ne pas jouer, tandis que 13 veulent parier ; ceux qui n'ont rien compris s'abstiennent.

(Ils sont donc virés du Club).

S'il y a au moins 167 numéros gagnants, le joueur est avantage ; sinon, l'avantage est du côté du casino.

Comment compter le nombre de numéros gagnants entre 1 et 1000 ? On peut facilement en donner une idée. Les numéros entre 1 et $2^3 - 1 = 7$ sont tous gagnants car $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor = 1$ pour chacun d'eux. Parmi les nombres de $2^3 = 8$ à $3^3 - 1 = 26$, seuls les numéros pairs sont gagnants. Parmi les numéros entre $3^3 = 27$ et $4^3 - 1 = 63$, les gagnants sont ceux qui sont divisibles par 3, et ainsi de suite.

On peut utiliser les techniques de sommation du chapitre 2 pour analyser systématiquement le problème, en profitant des crochets d'Iverson pour

les formules logiques :

$$\begin{aligned}
 W &= \sum_{n=1}^{1000} [n \text{ est gagnant}] \\
 &= \sum_{1 \leq n \leq 1000} [\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor \setminus n] = \sum_{k,n} [k = \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor] [k \setminus n] [1 \leq n \leq 1000] \\
 &= \sum_{k,m,n} [k^3 \leq n < (k+1)^3] [n = km] [1 \leq n \leq 1000] \\
 &= 1 + \sum_{k,m} [k^3 \leq km < (k+1)^3] [1 \leq k < 10] \\
 &= 1 + \sum_{k,m} [m \in [k^2 \dots (k+1)^3/k]] [1 \leq k < 10] \\
 &= 1 + \sum_{1 \leq k < 10} (\lceil k^2 + 3k + 3 + 1/k \rceil - \lceil k^2 \rceil) \\
 &= 1 + \sum_{1 \leq k < 10} (3k + 4) = 1 + \frac{7+31}{2} \cdot 9 = 172.
 \end{aligned}$$

Ce calcul mérite d'être étudié soigneusement. Remarquez que la ligne 6 fait appel à notre formule (3.12) qui donne le nombre d'entiers contenus dans un intervalle semi-ouvert. La seule manœuvre "difficile" est la décision de traiter à part le cas $n = 1000$ que nous avons prise entre les lignes 3 et 4. (L'inégalité $k^3 \leq n < (k+1)^3$ ne se combine pas facilement avec $1 \leq n \leq 1000$ lorsque $k = 10$). De façon générale, les conditions aux bornes sont souvent les passages les plus délicats des manipulations de sommes.

Ça c'est bien vrai.

La dernière ligne du calcul nous indique que $W = 172$. De ce fait on déduit que le gain moyen par partie est de $(6 \cdot 172 - 1000)/1000$ dollars, ce qui nous fait 3,2 cents. On peut donc espérer être plus riche de 3,2 dollars après avoir fait 100 parties à 1 dollar (sauf bien sûr si le casino fait en sorte que certains numéros soient plus égaux que d'autres).

Où disiez-vous qu'il était, ce casino ?

Le problème que nous venons de résoudre est une version "déguisée" d'une question plus abstraite : "parmi les entiers n tels que $1 \leq n \leq 1000$, combien satisfont la relation $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor \setminus n$? Mathématiquement parlant, les deux questions sont les mêmes, mais il est parfois bon de déguiser ainsi un problème. Cela permet d'utiliser un vocabulaire plus riche (comme "numéro gagnant" ou "numéro perdant") qui peut nous aider à mieux comprendre ce qui se passe.

Voyons les choses de façon plus générale. Supposons que le 1000 devienne 1000000, ou même un nombre arbitraire N , très grand. (Nous supposons que le casino a les moyens de se payer une roue plus grande). Combien y a-t-il alors de numéros gagnants ?

Les mêmes arguments sont valables, mais il nous faut manipuler avec

82 FONCTIONS ENTIÈRES

plus de précautions encore la plus grande valeur de k , que nous appellerons K :

$$K = \lfloor \sqrt[3]{N} \rfloor.$$

(Jusqu'ici, K était égal à 10). Le nombre total de numéros gagnants pour un N quelconque est

$$\begin{aligned} W &= \sum_{1 \leq k < K} (3k + 4) + \sum_m [K^3 \leq Km \leq N] \\ &= \frac{1}{2}(7 + 3K + 1)(K - 1) + \sum_m [m \in [K^2 \dots N/K]] \\ &= \frac{3}{2}K^2 + \frac{5}{2}K - 4 + \sum_m [m \in [K^2 \dots N/K]]. \end{aligned}$$

Nous savons que la somme qui reste est $\lfloor N/K \rfloor - \lceil K^2 \rceil + 1 = \lfloor N/K \rfloor - K^2 + 1$. Par conséquent la formule

$$W = \lfloor N/K \rfloor + \frac{1}{2}K^2 + \frac{5}{2}K - 3, \quad K = \lfloor \sqrt[3]{N} \rfloor \quad (3.13)$$

nous donne la réponse pour une roue de taille N .

Les deux premiers termes de cette formule valent approximativement $N^{2/3} + \frac{1}{2}N^{2/3} = \frac{3}{2}N^{2/3}$; les deux autres termes sont bien plus petits en comparaison lorsque N est grand. Nous apprendrons au chapitre 9 à calculer des expressions du genre de

$$W = \frac{3}{2}N^{2/3} + O(N^{1/3}),$$

où $O(N^{1/3})$ désigne une quantité qui n'est pas plus grande qu'un nombre constant de fois $N^{1/3}$. Quelle que soit cette constante multiplicative, nous savons qu'elle est indépendante de N ; donc, pour N grand, la contribution du terme $O(N^{1/3})$ à W sera petite par rapport à $\frac{3}{2}N^{2/3}$. Le tableau qui suit illustre ce fait, en montrant comment $\frac{3}{2}N^{2/3}$ se rapproche de W lorsque N croît :

N	$\frac{3}{2}N^{2/3}$	W	% erreur
1 000	150,0	172	12,791
10 000	696,2	746	6,670
100 000	3231,7	3343	3,331
1 000 000	15000,0	15247	1,620
10 000 000	69623,8	70158	0,761
100 000 000	323165,2	324322	0,357
1 000 000 000	1500000,0	1502497	0,166

C'est donc une très bonne approximation.

On utilise des formules approchées parce qu'elles sont plus simples que les formules contenant des parties entières. Cependant, il est souvent important de connaître l'exacte vérité, particulièrement pour les petites valeurs de N , qui apparaissent souvent en pratique. Par exemple, en utilisant la formule approchée, le propriétaire du casino aurait pu penser à tort qu'il y a seulement $\frac{3}{2}N^{2/3} = 150$ numéros gagnants lorsque $N = 1000$ (auquel cas la maison gagnerait en moyenne 10 cents par partie).

La dernière application de cette section concerne ce qu'on appelle les spectres. On appelle *spectre* d'un nombre réel α le multi-ensemble d'entiers suivant :

$$\text{Spec}(\alpha) = \{\lfloor \alpha \rfloor, \lfloor 2\alpha \rfloor, \lfloor 3\alpha \rfloor, \dots\}.$$

(Un multi-ensemble est comme un ensemble, à ceci près qu'il peut contenir des mêmes éléments plusieurs fois). Voici par exemple le début du spectre de $1/2$: $\{0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots\}$.

... sans mettre
de généralité...

On peut facilement montrer que si deux nombres α et β sont différents, alors leurs spectres sont différents. Pour cela, on peut supposer sans perte de généralité que $\alpha < \beta$. Il existe donc un entier positif m tel que $m(\beta - \alpha) \geq 1$. (En fait, n'importe quel $m \geq \lceil 1/(\beta - \alpha) \rceil$ peut convenir ; mais pour le moment nous n'avons pas besoin d'étaler notre science des parties entières). Donc $m\beta - m\alpha \geq 1$, et $\lfloor m\beta \rfloor > \lfloor m\alpha \rfloor$. On en conclut que $\text{Spec}(\beta)$ contient moins de m éléments $\leq \lfloor m\alpha \rfloor$, tandis que $\text{Spec}(\alpha)$ en contient au moins m .

Les spectres présentent un grand nombre de propriétés remarquables. Considérons par exemple les deux multi-ensembles

$$\begin{aligned}\text{Spec}(\sqrt{2}) &= \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, \dots\}, \\ \text{Spec}(2 + \sqrt{2}) &= \{3, 6, 10, 13, 17, 20, 23, 27, 30, 34, 37, 40, 44, 47, 51, \dots\}.\end{aligned}$$

"If x be an incommensurable number less than unity, one of the series of quantities m/x , $m/(1-x)$, where m is a whole number, can be found which shall lie between any given consecutive integers, and but one such quantity can be found."

— Rayleigh [304]

Une calculette suffit pour calculer $\text{Spec}(\sqrt{2})$, et d'après (3.6) le n ième élément de $\text{Spec}(2 + \sqrt{2})$ s'obtient en ajoutant $2n$ au n ième élément de $\text{Spec}(\sqrt{2})$. En regardant de plus près, on s'aperçoit que ces deux spectres sont même liés de façon bien plus surprenante : on dirait que chaque nombre qui manque dans l'un se trouve dans l'autre, et qu'aucun nombre n'est dans les deux à la fois ! Et c'est effectivement vrai : l'ensemble des entiers strictement positifs est l'union disjointe de $\text{Spec}(\sqrt{2})$ et $\text{Spec}(2 + \sqrt{2})$. On dit que ces deux spectres forment une *partition* de l'ensemble des nombres entiers strictement positifs.

C'est vrai, car, quand on ajoute 1 à n , on ajoute un nouvel élément à un seul des deux spectres.

Pour prouver cette assertion, nous allons compter le nombre d'éléments de $\text{Spec}(\sqrt{2})$ qui sont $\leq n$ et le nombre d'éléments de $\text{Spec}(2 + \sqrt{2})$ qui sont $\leq n$. Si la somme des deux est égale à n pour tout n , alors ces deux spectres forment en effet une partition des entiers.

84 FONCTIONS ENTIÈRES

Soit α un réel strictement positif. Le nombre d'éléments de $\text{Spec}(\alpha)$ qui sont $\leq n$ est

$$\begin{aligned}
 N(\alpha, n) &= \sum_{k \geq 0} [\lfloor k\alpha \rfloor \leq n] \\
 &= \sum_{k \geq 0} [\lfloor k\alpha \rfloor < n+1] \\
 &= \sum_{k \geq 0} [k\alpha < n+1] \\
 &= \sum_k [0 < k < (n+1)/\alpha] \\
 &= \lceil (n+1)/\alpha \rceil - 1.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Il y a deux points particulièrement intéressants dans ce calcul. D'abord, on y utilise la règle

$$m \leq n \iff m < n+1, \quad m \text{ et } n \text{ entiers} \tag{3.15}$$

pour transformer " $\leq$ " en " $<$ ", de sorte qu'on puisse supprimer, en vertu de (3.7), les crochets de partie entière inférieure. D'autre part — et c'est plus subtil — on somme pour $k \geq 0$ au lieu de $k \geq 1$, car $(n+1)/\alpha$ pourrait être plus petit que 1 pour certaines valeurs de n et α . Si nous avions appliqué (3.12) pour trouver le nombre d'entiers contenus dans $[1 \dots (n+1)/\alpha]$ au lieu du nombre d'entiers contenus dans $[0 \dots (n+1)/\alpha]$, nous aurions aussi trouvé la bonne réponse ; mais notre calcul aurait été incorrect car les conditions d'application n'auraient pas été respectées.

Bon. Nous avons donc une formule pour $N(\alpha, n)$. Maintenant, voyons si $\text{Spec}(\sqrt{2})$ et $\text{Spec}(2 + \sqrt{2})$ forment une partition des entiers strictement positifs. Pour cela, nous allons regarder, en utilisant (3.14), si $N(\sqrt{2}, n) + N(2 + \sqrt{2}, n) = n$ pour tout $n > 0$:

$$\begin{aligned}
 \left\lceil \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\rceil - 1 + \left\lceil \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} \right\rceil - 1 &= n \\
 \iff \left\lfloor \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} \right\rfloor &= n, && \text{d'après (3.2);} \\
 \iff \frac{n+1}{\sqrt{2}} - \left\{ \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\} + \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} - \left\{ \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} \right\} &= n, && \text{d'après (3.8).}
 \end{aligned}$$

La formule se simplifie grâce à la jolie petite identité

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} = 1,$$

et on n'a plus qu'à vérifier si

$$\left\{ \frac{n+1}{\sqrt{2}} \right\} + \left\{ \frac{n+1}{2+\sqrt{2}} \right\} = 1,$$

pour tout $n > 0$. C'est gagné, car le membre de gauche représente l'addition des parties fractionnaires de deux nombres non entiers dont la somme fait 1. C'est donc bien une partition.

3.3 RÉCURRENCES ET PARTIES ENTIÈRES

Avec les parties entières, on ajoute une nouvelle dimension à l'étude des relations de récurrence. Commençons par étudier la récurrence

$$\begin{aligned} K_0 &= 1; \\ K_{n+1} &= 1 + \min(2K_{\lfloor n/2 \rfloor}, 3K_{\lfloor n/3 \rfloor}), \quad \text{pour } n \geq 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ainsi, par exemple, $K_1 = 1 + \min(2K_0, 3K_0) = 3$. Les premiers termes de la suite sont 1, 3, 3, 4, 7, 7, 7, 9, 9, 10, 13, ... L'un des auteurs de cet ouvrage a modestement décidé d'appeler ces nombres les nombres de Knuth.

Dans l'exercice 25, il est demandé de prouver ou réfuter le fait que $K_n \geq n$ pour tout $n \geq 0$. Comme les premiers K_i satisfont cette inégalité, il y a de bonnes chances pour que ce soit vrai en général. Essayons de le prouver par induction : on tire la base $n = 0$ directement de la définition. Pour l'étape d'induction, supposons que l'inégalité est vraie pour tous les nombres compris entre 0 et un entier fixé n positif ou nul, et essayons de montrer que $K_{n+1} \geq n+1$. D'après la récurrence, nous savons que $K_{n+1} = 1 + \min(2K_{\lfloor n/2 \rfloor}, 3K_{\lfloor n/3 \rfloor})$. L'hypothèse d'induction nous indique que $2K_{\lfloor n/2 \rfloor} \geq 2\lfloor n/2 \rfloor$ et $3K_{\lfloor n/3 \rfloor} \geq 3\lfloor n/3 \rfloor$. Cependant, $2\lfloor n/2 \rfloor$ peut être égal à $n-1$ et $3\lfloor n/3 \rfloor$ peut être égal à $n-2$. Tout ce que nous pouvons donc conclure à partir de notre hypothèse d'induction, c'est que $K_{n+1} \geq 1 + (n-2)$. On n'atteint pas de cette façon l'inégalité $K_{n+1} \geq n+1$.

Nous avons maintenant des raisons d'être moins sûrs que l'inégalité $K_n \geq n$ soit vraie. Essayons donc de la réfuter. Si nous trouvons un n tel que soit $2K_{\lfloor n/2 \rfloor} < n$, soit $3K_{\lfloor n/3 \rfloor} < n$, nous aurons $K_{n+1} < n+1$. Est-ce possible ? Pour ne pas déflorer l'exercice 25, nous ne répondrons pas ici.

En informatique, on rencontre souvent des relations de récurrence qui font appel à des parties entières inférieures et/ou supérieures. C'est dû au fait que beaucoup d'algorithmes utilisent la précieuse technique "diviser pour régner" : il s'agit de résoudre un problème de taille n en le divisant en plusieurs problèmes similaires dont les tailles sont des fractions entières de n . Par exemple, pour trier n enregistrements ($n > 1$), on peut les partager en deux parts à peu près égales, de tailles $\lceil n/2 \rceil$ et $\lfloor n/2 \rfloor$. (Notons en

Par exemple, si $m = 41$ et $n = 127$, la somme de gauche contient 41 termes tandis que celle de droite en a 127 ; et pourtant, elles sont égales pour tout réel x .

Exercices

Echauffements

- 1 Au cours de l'analyse du problème de Josèphe au chapitre 1, nous avons décidé d'écrire un entier n quelconque sous la forme $n = 2^m + l$, où $0 \leq l < 2^m$. Calculez explicitement l et m en fonction de n , en utilisant les crochets de partie entière inférieure et/ou supérieure.
- 2 Trouvez une formule qui donne l'entier le plus proche d'un nombre réel donné x . Si x se trouve exactement au milieu de deux entiers, donnez une expression qui arrondit (a) par excès ; (b) par défaut.
- 3 Calculez $\lfloor \lfloor m\alpha \rfloor n / \alpha \rfloor$, où m et n sont des entiers strictement positifs et α un nombre irrationnel supérieur à n .
- 4 On définit dans ce chapitre les problèmes de niveau 1 à 5. Qu'est-ce qu'un problème de niveau 0 ? (Celui-ci n'est *pas* un problème de niveau 0).
- 5 Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que $\lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor$ lorsque n est un entier strictement positif. (On a le droit d'utiliser $\{x\}$ dans la condition).
- 6 Peut-on dire quelque chose d'intéressant sur $\lfloor f(x) \rfloor$ quand $f(x)$ est une fonction continue et strictement *décroissante* dont la valeur ne peut être entière que si x est un entier ?
- 7 Résolvez la récurrence

$$\begin{aligned} X_n &= n, & \text{pour } 0 \leq n < m; \\ X_n &= X_{n-m} + 1, & \text{pour } n \geq m. \end{aligned}$$

- 8 Démontrez le *principe des boîtes de Dirichlet* : si on range n objets dans m boîtes, il y a au moins une boîte qui contient $\geq \lceil n/m \rceil$ objets, et au moins une boîte qui en contient $\leq \lfloor n/m \rfloor$.
- 9 En 1800 avant Jésus-Christ, les mathématiciens égyptiens représentaient les nombres rationnels entre 0 et 1 comme des sommes de fractions unitaires $1/x_1 + \dots + 1/x_k$, où les x_i étaient des entiers strictement positifs distincts. Par exemple, ils écrivaient $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ au lieu de $\frac{2}{5}$. Montrez qu'on peut toujours le faire de façon systématique : si $0 < m/n < 1$, alors

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{q} + \left\{ \text{représentation de } \frac{m}{n} - \frac{1}{q} \right\}, \quad q = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil.$$

Comment sait-on si on est à l'université ? C'est quand votre livre ne vous dit pas comment on doit prononcer "Dirichlet".

(C'est l'*algorithme de Fibonacci*, dû à Leonardo Fibonacci (1202)).

Exercices de base

10 Montrez que l'expression

$$\left\lceil \frac{2x+1}{2} \right\rceil - \left\lceil \frac{2x+1}{4} \right\rceil + \left\lfloor \frac{2x+1}{4} \right\rfloor$$

est toujours égale soit à $\lfloor x \rfloor$, soit à $\lceil x \rceil$. Dans quelles circonstances chacun de ces cas se produit-il ?

11 Ecrivez en détail la preuve, éludée dans le chapitre, du fait que l'intervalle ouvert (α, β) contient exactement $\lceil \beta \rceil - \lfloor \alpha \rfloor - 1$ entiers lorsque $\alpha < \beta$. Pourquoi la preuve ne peut-elle être correcte que si on exclut le cas $\alpha = \beta$?

12 Montrez que

$$\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor$$

pour tout entier n et tout entier strictement positif m . (Cette identité nous fournit une nouvelle méthode, différente de la règle (3.4), pour convertir des parties entières supérieures en parties entières inférieures et vice-versa).

13 Soient α et β deux réels strictement positifs. Montrez que $\text{Spec}(\alpha)$ et $\text{Spec}(\beta)$ forment une partition de l'ensemble des entiers strictement positifs si et seulement si α et β sont irrationnels et $1/\alpha + 1/\beta = 1$.

14 Prouvez ou réfutez l'égalité suivante :

$$(x \bmod ny) \bmod y = x \bmod y, \quad n \text{ entier.}$$

15 Existe-t-il une identité analogue à (3.26) faisant intervenir des parties entières inférieures au lieu de parties entières supérieures ?

16 Montrez que $n \bmod 2 = (1 - (-1)^n)/2$. Trouvez et prouvez une expression similaire pour $n \bmod 3$, de la forme $a + b\omega^n + c\omega^{2n}$, où ω est le nombre complexe $(-1 + i\sqrt{3})/2$. *Suggestion* : remarquez que $\omega^3 = 1$ et $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

17 Calculez la somme $\sum_{0 \leq k < m} \lfloor x + k/m \rfloor$ dans le cas où $x \geq 0$, en substituant $\sum_j [1 \leq j \leq x + k/m]$ à $\lfloor x + k/m \rfloor$ et en sommant d'abord sur k . Votre réponse s'accorde-t-elle avec (3.26) ?

18 Montrez que le terme d'erreur S de (3.30) est au plus égal à $\lceil \alpha^{-1} \nu \rceil$. *Suggestion* : montrez que les petites valeurs de j n'y contribuent pas.