Dans ce cas, on a $S_0 = 0$, $S_1 = 2$, $S_2 = 10$, $S_3 = 34$, $S_4 = 98$. Quelle est la formule générale ? D'après (2.24) on a

$$S_n + (n+1)2^{n+1} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (k+1)2^{k+1},$$

et il nous faut exprimer le membre droit en fonction de S_n. En utilisant l'associativité, on peut toujours le séparer en deux sommes,

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} k2^{k+1} + \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} 2^{k+1},$$

dont la première est égale à $2S_n$. L'autre somme et une progression géométrique, qui est égale à $(2 - 2^{n+2})/(1-2) = 2^{n+2} - 2$ d'après (2.25). Par conséquent, $S_n + (n+1)2^{n+1} = 2S_n + 2^{n+2} - 2$, et on obtient

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

Maintenant on comprend pourquoi $S_3 = 34$: c'est $32 + 2$, et non pas $2 \cdot 17$.

En effectuant le même travail avec x à la place de 2, on trouverait l'équation $S_n + (n+1)x^{n+1} = xS_n + (x - x^{n+2})/(1-x)$. On en déduit donc que

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}, \qquad \text{pour } x \neq 1. \tag{2.26}$$

Il est intéressant de remarquer qu'on aurait pu obtenir cette formule close de manière complètement différente, avec des techniques élémentaires de calcul différentiel. En partant de l'équation

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

et en dérivant des deux côtés par rapport à x, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{(1-x)\bigl(-(n+1)x^n\bigr) + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2},$$

du fait que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées de ses termes. Nous verrons dans les chapitres suivants qu'il existe de nombreux liens entre le calcul infinitésimal et les mathématiques discrètes.

2.4 SOMMES MULTIPLES

Il est possible de spécifier les termes d'une somme par deux ou plusieurs indices, au lieu d'un seulement. Voici par exemple une somme double de neuf termes, indicés par deux variables j et k :

Notez qu'on ne somme pas sur tout $j \geqslant 1$ et tout $k \leqslant 3$.

$$\sum_{1\leqslant j,k\leqslant 3} a_j b_k = a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 \\ + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 \\ + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 .$$

On utilise pour ce genre de sommes les mêmes notations et méthodes que pour les sommes à un seul indice. Ainsi, si $P(j,k)$ est une propriété de j et k, la somme de tous les termes $a_{j,k}$ tels que $P(j,k)$ est vraie peut s'écrire de deux façons. L'une d'elles utilise la convention d'Iverson et somme sur *toutes* les paires d'entiers j et k :

$$\sum_{P(j,k)} a_{j,k} = \sum_{j,k} a_{j,k}\,[P(j,k)] .$$

Un seul signe $\sum$ est nécessaire, bien qu'il y ait plus d'un indice de sommation. $\sum$ désigne une somme sur toutes les combinaisons possibles des indices.

On utilise deux $\sum$ lorsque on est en présence d'une somme de sommes. Par exemple,

$$\sum_j \sum_k a_{j,k}\,[P(j,k)]$$

est une abréviation de

$$\sum_j \Bigl(\sum_k a_{j,k}\,[P(j,k)]\Bigr) ,$$

Les Σ doivent être évalués de droite à gauche (à l'envers).

qui désigne la somme, sur tous les entiers j, de $\sum_k a_{j,k}\,[P(j,k)]$, cette dernière somme étant la somme, sur tous les entiers k, des termes $a_{j,k}$ pour lesquels $P(j,k)$ est vraie. Dans de tels cas, on dit que la somme double est "sommée d'abord sur k". Une somme qui dépend de plus d'un indice peut être sommée d'abord sur n'importe lequel de ses indices.

Pour ce faire, il existe une loi de base, appelée *changement de l'ordre de sommation*, qui généralise la règle d'associativité (2.16) vue précédemment :

$$\sum_j \sum_k a_{j,k}[P(j,k)] = \sum_{P(j,k)} a_{j,k} = \sum_k \sum_j a_{j,k}[P(j,k)] . \qquad (2.27)$$

Le membre du milieu est une somme sur deux indices. A gauche, $\sum_j \sum_k$ signifie que l'on somme d'abord sur k, puis sur j. A l'inverse, dans le membre de droite, $\sum_k \sum_j$ doit être sommé d'abord sur j, puis sur k. En pratique, quand on cherche une formule close pour une somme double, il y a généralement un indice préférable à l'autre pour débuter la sommation ; il faut donc choisir cet indice avec soin.

Il n'y a pas de raison de paniquer devant une somme de sommes, bien qu'il soit naturel que les débutants soient quelque peu déroutés. Regardons donc encore quelques exemples. Nous allons illustrer les manipulations de sommes doubles en travaillant sur la somme de neuf termes présentée plus haut. Elle constitue un bon exemple, car elle peut effectivement être simplifiée, et le processus de simplification est typique de ce qu'on peut faire avec les $\sum\sum$:

Paniquer ? Je trouve cette règle assez évidente par rapport à certains passages du chapitre 1.

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant j,k\leqslant 3} a_j b_k &= \sum_{j,k} a_j b_k [1\leqslant j,k\leqslant 3] = \sum_{j,k} a_j b_k [1\leqslant j\leqslant 3][1\leqslant k\leqslant 3] \\
&= \sum_j \sum_k a_j b_k [1\leqslant j\leqslant 3][1\leqslant k\leqslant 3] \\
&= \sum_j a_j [1\leqslant j\leqslant 3] \sum_k b_k [1\leqslant k\leqslant 3] \\
&= \sum_j a_j [1\leqslant j\leqslant 3] \Bigl(\sum_k b_k [1\leqslant k\leqslant 3]\Bigr) \\
&= \Bigl(\sum_j a_j [1\leqslant j\leqslant 3]\Bigr)\Bigl(\sum_k b_k [1\leqslant k\leqslant 3]\Bigr) \\
&= \Bigl(\sum_{j=1}^{3} a_j\Bigr)\Bigl(\sum_{k=1}^{3} b_k\Bigr) .
\end{aligned}$$

Ici, la première ligne désigne une somme de neuf termes sans ordre particulier. La seconde ligne les groupe par trois, $(a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3) + (a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3) + (a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3)$. Dans la troisième ligne, on utilise la distributivité pour factoriser les a, car a_j et $[1 \leqslant j \leqslant 3]$ ne dépendent pas de k ; on obtient $a_1(b_1+b_2+b_3)+a_2(b_1+b_2+b_3)+a_3(b_1+b_2+b_3)$. La quatrième ligne est semblable à la troisième, mais on y a ajouté des parenthèses redondantes pour que la cinquième ligne ne paraisse pas trop mystérieuse. La cinquième ligne factorise les $(b_1+b_2+b_3)$ qui apparaissent pour chaque valeur de j : $(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$. La dernière ligne est juste une façon différente d'écrire la précédente. On peut utiliser cette méthode de transformation pour prouver une *règle générale de distributivité*,

$$\sum_{\substack{j\in J\\ k\in K}} a_j b_k = \Bigl(\sum_{j\in J} a_j\Bigr)\Bigl(\sum_{k\in K} b_k\Bigr) , \qquad (2.28)$$

valable quels que soient les ensembles d'indices J et K.

Il existe beaucoup de variantes de la loi de base (2.27) permettant d'échanger l'ordre d'une sommation. On les utilise lorsqu'on veut restreindre la portée des indices pour éviter de sommer sur tous les entiers j et k. Ces variantes existent en deux versions : la simple et la moins simple. Voyons d'abord la première :

$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} a_{j,k} = \sum_{\substack{j\in J\\ k\in K}} a_{j,k} = \sum_{k\in K}\sum_{j\in J} a_{j,k}\,. \tag{2.29}$$

C'est tout simplement une façon différente d'écrire (2.27), car l'Iversonien $[j\in J, k\in K]$ se factorise en $[j\in J][k\in K]$. Cette règle peut être appliquée chaque fois que les portées de j et de k sont mutuellement indépendantes.

La formule moins simple est un peu plus technique. On peut l'appliquer quand la portée d'une somme intérieure dépend de la variable d'indice de la somme extérieure :

$$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K(j)} a_{j,k} = \sum_{k\in K'}\sum_{j\in J'(k)} a_{j,k}\,. \tag{2.30}$$

Ici, les ensembles J, $K(j)$, K' et $J'(K)$ sont liés de sorte que

$$[j\in J]\big[k\in K(j)\big] = [k\in K']\big[j\in J'(k)\big]\,.$$

Une factorisation comme celle-ci est toujours possible en principe, car on peut considérer que $J = K'$ est l'ensemble de tous les entiers et $K(j) = J'(k)$ est la propriété $P(j,k)$ qui gouverne une somme double. Cependant, il existe des cas spécifiques importants pour lesquels J, $K(j)$, K' et $J'(K)$ s'expriment simplement. Cela arrive dans beaucoup d'applications. Voici par exemple une factorisation particulièrement utile :

$$[1\leqslant j\leqslant n][j\leqslant k\leqslant n] = [1\leqslant j\leqslant k\leqslant n] = [1\leqslant k\leqslant n][1\leqslant j\leqslant k]\,. \tag{2.31}$$

D'après cette "équation iversonienne", on peut écrire

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_{j,k} = \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} a_{j,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_{j,k}\,. \tag{2.32}$$

Généralement, l'une de ces deux sommes doubles est plus facile à calculer que l'autre. Avec (2.32), on peut choisir celle qui convient le mieux.

(C'est le moment de faire les exercices d'échauffement 4 et 6).

(Ou d'aller voir s'il reste quelque chose à grignoter dans le frigo).

Appliquons ces idées à un exemple concret. Considérons le tableau de n^2 produits

$$\begin{bmatrix} a_1a_1 & a_1a_2 & a_1a_3 & \ldots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2a_2 & a_2a_3 & \ldots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3a_3 & \ldots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \ldots & a_na_n \end{bmatrix}.$$

Notre but est de trouver une formule simple pour

$$S_{\urcorner} = \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} a_j a_k\,,$$

la somme de tous les éléments situés dans ou au dessus de la diagonale principale du tableau. Comme $a_j a_k = a_k a_j$, le tableau est symétrique par rapport à sa première diagonale ; donc $S_{\urcorner}$ doit être à peu près égal à la moitié de la somme de *tous* les éléments (sauf un petit quelque chose à supprimer pour prendre en compte la diagonale principale).

Ces considérations suggèrent les manipulations suivantes. On a

$$S_{\urcorner} = \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} a_j a_k = \sum_{1\leqslant k\leqslant j\leqslant n} a_k a_j = \sum_{1\leqslant k\leqslant j\leqslant n} a_j a_k = S_{\llcorner}\,,$$

car on peut remplacer (j,k) par (k,j). De plus, comme

$$[1\leqslant j\leqslant k\leqslant n]+[1\leqslant k\leqslant j\leqslant n] = [1\leqslant j,k\leqslant n]+[1\leqslant j=k\leqslant n]\,,$$

on a

$$2S_{\urcorner} = S_{\urcorner}+S_{\llcorner} = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_j a_k + \sum_{1\leqslant j=k\leqslant n} a_j a_k\,.$$

D'après la règle de distributivité (2.28), la première somme est égale à $\left(\sum_{j=1}^n a_j\right)\left(\sum_{k=1}^n a_k\right) = \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2$. La seconde est égale à $\sum_{k=1}^n a_k^2$. On obtient donc une expression de la somme du triangle supérieur en fonction de sommes plus simples :

$$S_{\urcorner} = \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} a_j a_k = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2\right), \tag{2.33}$$

Encouragés par ce succès, regardons une autre somme double :

$$S = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j)\,.$$

Il y a de nouveau une symétrie lorsqu'on permute j et k :

$$S = \sum_{1\leqslant k<j\leqslant n} (a_j - a_k)(b_j - b_k) = \sum_{1\leqslant k<j\leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j)\,.$$

Ainsi, en utilisant l'identité

$$[1\leqslant j<k\leqslant n]+[1\leqslant k<j\leqslant n] = [1\leqslant j,k\leqslant n]-[1\leqslant j=k\leqslant n]$$

on peut ajouter S à elle-même pour conclure que

$$2S = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} (a_j - a_k)(b_j - b_k) - \sum_{1\leqslant j=k\leqslant n} (a_j - a_k)(b_j - b_k).$$

La seconde somme est nulle ; qu'en est-il de la première ? Elle peut se développer en quatre sommes séparées :

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_j b_j - \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_j b_k - \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_k b_j + \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_k b_k \\
&\quad = 2 \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_k b_k - 2 \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_j b_k \\
&\quad = 2n \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k b_k - 2\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big).
\end{aligned}$$

Dans la dernière étape, on a simplifié les deux sommes selon la règle de distributivité (2.28) . La manipulation de la première somme peut paraître mystérieuse ; voici la même au ralenti :

$$\begin{aligned}
2 \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} a_k b_k &= 2 \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_k b_k \\
&= 2 \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k b_k \sum_{1\leqslant j\leqslant n} 1 \\
&= 2 \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k b_k n = 2n \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k b_k.
\end{aligned}$$

On peut aisément éliminer une variable qui n'apparaît pas dans le terme générique (ici j) en multipliant ce qui est à gauche par la taille de l'ensemble des indices (ici n).

Revenons à nos moutons. Maintenant on peut tout diviser par 2 et réorganiser les choses pour obtenir une formule intéressante :

(En réalité, le résultat de Tchebychev [58] concerne les intégrales, non les sommes : $\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) \cdot \left(\int_a^b g(x)\,dx\right) \leqslant (b-a) \cdot \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)$, *si* $f(x)$ *et* $g(x)$ *sont deux fonctions monotones non décroissantes.*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big) = n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (a_k - a_j)(b_k - b_j) \quad (2.34)$$

Cette identité généralise les *inégalités monotones de Tchebychev* :

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big) \leqslant n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad \text{si } a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n \text{ et } b_1 \leqslant \cdots \leqslant b_n;$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big) \geqslant n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad \text{si } a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n \text{ et } b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_n.$$

(Si $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ et si p est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$, on peut prouver sans difficulté que l'expression $\sum_{k=1}^{n} a_k b_{p(k)}$ atteint sa valeur maximale lorsque $b_{p(1)} \leqslant \cdots \leqslant b_{p(n)}$, et sa valeur minimale quand $b_{p(1)} \geqslant \cdots \geqslant b_{p(n)}$).

Il existe une relation intéressante entre la sommation multiple et l'opération de changement d'indice de sommation dans les sommes *simples*. Nous savons qu'en vertu de la règle de commutativité, si $p(k)$ est une permutation sur l'ensemble des entiers, alors

$$\sum_{k \in K} a_k = \sum_{p(k) \in K} a_{p(k)} .$$

Mais que se passe-t-il si l'on remplace k par $f(j)$, où f est une fonction arbitrairement choisie

$$f : J \to K$$

qui fait correspondre à tout entier $j \in J$ un entier $f(j) \in K$? La formule générale du changement d'indice est

$$\sum_{j \in J} a_{f(j)} = \sum_{k \in K} a_k \, \#f^{-}(k) , \qquad (2.35)$$

où $\#f^{-}(k)$ représente le nombre d'éléments de l'ensemble

$$f^{-}(k) = \bigl\{ j \bigm| f(j) = k \bigr\} ,$$

c'est-à-dire le nombre de valeurs $j \in J$ telles que $f(j)$ est égal à k.

On peut aisément démontrer (2.35) en modifiant l'ordre de sommation,

$$\sum_{j \in J} a_{f(j)} = \sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} a_k \bigl[f(j) = k \bigr] = \sum_{k \in K} a_k \sum_{j \in J} \bigl[f(j) = k \bigr] ,$$

du fait que $\sum_{j \in J} \bigl[f(j) = k \bigr] = \#f^{-}(k)$. Dans le cas particulier où f est une correspondance terme à terme entre J et K, on a $\#f^{-}(k) = 1$ pour tout k, et la formule générale (2.35) se réduit en

Mon autre prof de math appelle ça une "bijection" ; peut-être qu'un jour je m'y habituerai.

$$\sum_{j \in J} a_{f(j)} = \sum_{f(j) \in K} a_{f(j)} = \sum_{k \in K} a_k .$$

C'est une version un peu déguisée de la règle de commutativité que nous avions auparavant (2.17).

Les exemples de sommes multiples que nous avons vus jusqu'à présent mettaient en jeu des termes généraux, comme a_k ou b_k. Comme ce livre est sensé être concret, jetons quand même un coup d'œil sur une somme multiple faisant intervenir de vrais nombres :

Méfiez-vous, les auteurs ont l'air de croire que j, k, et n sont des "vrais nombres".

$$S_n = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \frac{1}{k-j}.$$

Par exemple, $S_1 = 0$; $S_2 = 1$; $S_3 = \frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} + \frac{1}{3-2} = \frac{5}{2}$.

Pour évaluer une somme double, il faut sommer soit d'abord sur j, soit d'abord sur k. Essayons les deux alternatives.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{1\leqslant j<k} \frac{1}{k-j} && \text{on somme d'abord sur } j\\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{1\leqslant k-j<k} \frac{1}{j} && \text{on remplace } j \text{ par } k-j\\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{0<j\leqslant k-1} \frac{1}{j} && \text{on simplifie les bornes de } j\\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} H_{k-1} && \text{d'après (2.13), la définition de } H_{k-1}\\
&= \sum_{1\leqslant k+1\leqslant n} H_k && \text{on remplace } k \text{ par } k+1\\
&= \sum_{0\leqslant k<n} H_k\,. && \text{on simplifie les bornes de } k
\end{aligned}$$

Malheur ! Nous n'arrivons pas à trouver une formule close pour la somme des nombres harmoniques.

Au cachot !

Si on essaie de sommer de l'autre manière, on obtient

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{j<k\leqslant n} \frac{1}{k-j} && \text{on somme d'abord sur } k\\
&= \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{j<k+j\leqslant n} \frac{1}{k} && \text{on remplace } k \text{ par } k+j\\
&= \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{0<k\leqslant n-j} \frac{1}{k} && \text{on simplifie les bornes de } k\\
&= \sum_{1\leqslant j\leqslant n} H_{n-j} && \text{d'après (2.13), la définition de } H_{n-j}\\
&= \sum_{1\leqslant n-j\leqslant n} H_j && \text{on remplace } j \text{ par } n-j\\
&= \sum_{0\leqslant j<n} H_j\,. && \text{on simplifie les bornes de } j
\end{aligned}$$

Nous sommes encore dans l'impasse.

Il y a cependant une *autre* façon de procéder, qui consiste à remplacer k par $k+j$ *avant* de transformer S_n en une somme de sommes :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} \frac{1}{k-j} && \text{on recopie la somme donnée}\\
&= \sum_{1\leqslant j<k+j\leqslant n} \frac{1}{k} && \text{on remplace } k \text{ par } k+j\\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant j\leqslant n-k} \frac{1}{k} && \text{on somme d'abord sur } j\\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{n-k}{k} && \text{la somme sur } j \text{ est triviale}\\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{n}{k} - \sum_{1\leqslant k\leqslant n} 1 && \text{d'après la règle d'associativité}\\
&= n\Bigl(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k}\Bigr) - n && \text{d'après nous}\\
&= nH_n - n\,. && \text{d'après (2.13), la définition de } H_n
\end{aligned}$$

Plutôt fûté de mettre $k \leqslant n$ au lieu de $k \leqslant n-1$ dans ce calcul. En prenant des bornes simples, on ne gaspille pas d'énergie.

Enfin ! Nous avons trouvé S_n. En combinant ce résultat avec le faux départ de tout à l'heure, on gagne même une identité supplémentaire :

$$\sum_{0\leqslant k<n} H_k = nH_n - n\,. \tag{2.36}$$

Il y a deux façons de comprendre le truc qui a fonctionné ici : l'une est algébrique, l'autre géométrique. (1) Algébriquement, si on est en présence d'une somme double dont les termes font appel à $k+f(j)$ où f est une fonction, cet exemple nous dit que c'est une bonne idée d'essayer de remplacer k par $k-f(j)$ et de sommer sur j. (2) Géométriquement, on peut considérer cette somme particulière S_n de la façon suivante, si $n=4$ par exemple :

$$\begin{array}{lcccc}
 & k=1 & k=2 & k=3 & k=4\\
j=1 & & \frac{1}{1} & +\ \frac{1}{2} & +\ \frac{1}{3}\\
j=2 & & & \frac{1}{1} & +\ \frac{1}{2}\\
j=3 & & & & \frac{1}{1}\\
j=4 & & & &
\end{array}$$

Lors de nos premiers essais, nous avons sommé sur j (par colonnes) ou sur k (par lignes) ; cela donnait $H_1 + H_2 + H_3 = H_3 + H_2 + H_1$. La stratégie gagnante a consisté en fait à sommer par diagonales pour trouver $\frac{3}{1} + \frac{2}{2} + \frac{1}{3}$.

Il suffit de montrer que cette assertion est vraie lorsque tous les termes sont positifs ou nuls, car on peut prouver le cas général en séparant tout en parties imaginaire et réelle, puis en parties positive et négative comme nous l'avons déjà vu. Supposons donc que $a_{j,k} \geqslant 0$ pour tout couple $(j,k) \in M$, où M est l'ensemble d'indices $\{(j,k) \mid j \in J, k \in K_j\}$.

Pour tout ensemble fini $F \subseteq M$, nous savons que $\sum_{(j,k)\in M} a_{j,k}$ est fini, donc que

$$\sum_{(j,k)\in F} a_{j,k} \leqslant A,$$

et que A est le plus petit de ces majorants (la borne supérieure). Si j est un élément quelconque de J, chaque somme de la forme $\sum_{k\in F_j} a_{j,k}$, où F_j est un sous-ensemble fini de K_j, est bornée par A. Donc ces sommes finies ont une borne supérieure $A_j \geqslant 0$, et $\sum_{k\in K_j} a_{j,k} = A_j$ par définition.

Il nous faut encore prouver que A est la borne supérieure de $\sum_{j\in G} A_j$ pour tout ensemble fini $G \subseteq J$. Supposons que G est un sous-ensemble fini de J et que $\sum_{j\in G} a_{j,k} = A' > A$. On peut trouver des sous-ensembles finis $F_j \subseteq K_j$ tels que $\sum_{k\in F_j} a_{j,k} > (A/A')A_j$ pour tout $j \in G$ tel que $A_j > 0$. Il existe au moins un tel j. Mais alors $\sum_{j\in G, k\in F_j} a_{j,k} > (A/A') \sum_{j\in G} A_j = A$, ce qui contredit le fait que $\sum_{(j,k)\in F} a_{j,k} \leqslant A$ pour tout sous-ensemble fini $F \subseteq M$. Donc $\sum_{j\in G} A_j \leqslant A$ pour tout sous-ensemble fini $G \subseteq J$.

Pour finir, soit A' un nombre réel plus petit que A. Notre preuve sera complète si nous pouvons trouver un ensemble fini $G \subseteq J$ tel que $\sum_{j\in G} A_j > A'$. Nous savons qu'il existe un ensemble fini $F \subseteq M$ tel que $\sum_{(j,k)\in F} a_{j,k} > A'$; soit G l'ensemble des j de ce F, et soit $F_j = \{k \mid (j,k) \in F\}$. Alors $\sum_{j\in G} A_j \geqslant \sum_{j\in G} \sum_{k\in F_j} a_{j,k} = \sum_{(j,k)\in F} a_{j,k} > A'$. CQFD.

Bien, nous sommes maintenant légitimés ! Tout ce que nous avons fait avec les sommes infinies est justifié, pourvu qu'il existe une borne finie pour toutes les sommes finies des valeurs absolues des termes. Puisque la somme doublement infinie (2.58) nous a donné deux réponses différentes selon la manière dont nous l'avons évaluée, ses termes positifs $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ doivent forcément diverger vers ∞ ; sinon, nous aurions obtenu la même réponse quelle que soit la façon de grouper les termes.

Exercices

Echauffements

1 Que signifie la notation

$$\sum_{k=4}^{0} q_k \ ?$$

2 Simplifiez l'expression $x \cdot \big([x>0] - [x<0]\big)$.

3 Montrez que vous avez bien compris la notation $\sum$ en développant entièrement les sommes

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant 5} a_k \qquad \text{et} \qquad \sum_{0\leqslant k^2\leqslant 5} a_{k^2}$$

(attention, la seconde somme est un peu délicate).

4 Ecrivez la somme triple

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4} a_{ijk}$$

comme une sommation en trois parties (avec trois $\sum$),
a en sommant d'abord sur k, puis sur j, enfin sur i ;
b en sommant d'abord sur i, puis sur j, enfin sur k.
Puis écrivez entièrement les sommes triples sans la notation $\sum$, en utilisant des parenthèses pour montrer ce qu'on ajoute d'abord.

5 Qu'est-ce qui cloche dans le calcul suivant ?

$$\Bigl(\sum_{j=1}^{n} a_j\Bigr)\Bigl(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\Bigr) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_j}{a_k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} n = n^2.$$

6 Calculez $\sum_k [1\leqslant j\leqslant k\leqslant n]$ en fonction de j et n?

7 Soit $\nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$. Calculez $\nabla(x^{\overline{m}})$.

8 Si m est un entier, quelle est la valeur de $0^{\underline{m}}$?

9 Trouvez un analogue de la règle (2.52) pour les puissances montantes. Utilisez cette règle pour définir $x^{\overline{-n}}$.

10 Nous avons donné la formule suivante pour la différence d'un produit :

$$\Delta(uv) = u\,\Delta v + Ev\,\Delta u\,.$$

Comment peut-elle être correcte, alors que le membre de gauche est symétrique en u et v tandis que le membre de droite ne l'est pas ?

Exercices de base

11 La règle de sommation par parties (2.56) est équivalente à

$$\sum_{0\leqslant k<n}(a_{k+1}-a_k)b_k = a_n b_n - a_0 b_0 - \sum_{0\leqslant k<n} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k), \quad \text{pour } n\geqslant 0.$$

Prouvez cette formule directement, en utilisant les règles de distributivité, d'associativité et de commutativité.

12 Montrez que, quelque soit l'entier c, la fonction $p(k) = k + (-1)^k c$ est une permutation sur l'ensemble des entiers.

13 Utilisez la méthode du répertoire pour trouver une forme close de $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2$.

14 Calculez $\sum_{k=1}^{n} k2^k$ en la réécrivant $\sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} 2^k$.

15 Calculez $\boxdot_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$ par la méthode 5 en procédant ainsi : écrivez d'abord $\boxdot_n + \square_n = 2\sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} jk$, puis appliquez (2.33).

16 Montrez que $x^{\underline{m}}/(x-n)^{\underline{m}} = x^{\underline{n}}/(x-m)^{\underline{n}}$, pourvu qu'aucun des dénominateurs ne soit nul.

17 Montrez qu'on peut utiliser les formules suivantes pour convertir factorielles montantes en factorielles descendantes et inversement ($x^{\overline{-m}}$ est défini par la réponse à l'exercice 9) :

$$
\begin{aligned}
x^{\overline{m}} &= (-1)^m(-x)^{\underline{m}} = (x+m-1)^{\underline{m}} = 1/(x-1)^{\underline{-m}};\\
x^{\underline{m}} &= (-1)^m(-x)^{\overline{m}} = (x-m+1)^{\overline{m}} = 1/(x+1)^{\overline{-m}}.
\end{aligned}
$$

18 Soient $\Re z$ et $\Im z$ les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe z. Le module de z, noté $|z|$, est égal à $\sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}$. On dit qu'une somme $\sum_{k \in K} a_k$ de termes complexes a_k est absolument convergente si les sommes réelles $\sum_{k \in K} \Re a_k$ et $\sum_{k \in K} \Im a_k$ sont toutes deux absolument convergentes. Prouvez que $\sum_{k \in K} a_k$ est absolument convergente si et seulement s'il existe une constante B telle que $\sum_{k \in F} |a_k| \leqslant B$ pour tout sous-ensemble fini $F \subseteq K$.

Devoirs à la maison

19 Utilisez un facteur de sommation pour résoudre la récurrence

$$
\begin{aligned}
T_0 &= 5;\\
2T_n &= nT_{n-1} + 3 \cdot n!, \qquad \text{pour } n > 0.
\end{aligned}
$$

20 Essayez de calculer $\sum_{k=0}^{n} kH_k$ par la méthode de perturbation, mais au lieu de cela trouvez la valeur de $\sum_{k=0}^{n} H_k$.

21 Calculez les sommes $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}$, $T_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}k$ et $U_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}k^2$ avec la méthode de perturbation, en supposant que $n \geqslant 0$.

22 Prouvez l'*identité de Lagrange* (sans utiliser l'induction) :

$$
\sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (a_j b_k - a_k b_j)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2.
$$

Difficile de justifier l'identité de quelqu'un qui est mort depuis 175 ans.