

possibles" :

$$n = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{n-m+1}{m} \right\rceil. \quad (3.24)$$

Cette identité est valable pour tout entier strictement positif m et pour tout entier n (positif, négatif ou nul). Nous avons déjà rencontré le cas $m = 2$ en (3.17) sous une forme un peu différente : $n = \lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor$.

Si nous avions voulu que les parts soient en ordre de tailles décroissantes nous aurons procédé de manière similaire, la seule différence étant que nous aurions mis $\lfloor n/m \rfloor$ objets dans le premier groupe. Nous aurions alors trouvé l'identité correspondante :

$$n = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor. \quad (3.25)$$

On peut passer de (3.25) à (3.24) et réciproquement en utilisant, au choix, (3.4) ou l'identité de l'exercice 12.

Maintenant, en remplaçant le n de (3.25) par $\lfloor mx \rfloor$ et en appliquant la règle (3.11) pour supprimer les parties entières à l'intérieur d'autres parties entières, on obtient une identité valable pour tout réel x :

$$\lfloor mx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x + \frac{m-1}{m} \right\rfloor. \quad (3.26)$$

C'est assez étonnant. En effet, nous savons bien que la fonction partie entière inférieure donne une approximation entière d'une valeur réelle ; mais ce qui se passe ici, c'est que l'unique approximation de gauche donne le même résultat que la somme des approximations de droite. Si on considère que $\lfloor x \rfloor$ est en moyenne à peu près égal à $x - \frac{1}{2}$, le membre de gauche vaut à peu près $mx - \frac{1}{2}$, tandis que celui de droite donne, en gros, $(x - \frac{1}{2}) + (x - \frac{1}{2} + \frac{1}{m}) + \cdots + (x - \frac{1}{2} + \frac{m-1}{m}) = mx - \frac{1}{2}$; et il se trouve que la somme de toutes ces approximations grossières est exacte !

3.5 SOMMES DE PARTIES ENTIÈRES

L'équation (3.26) montre qu'il existe au moins un type de sommes contenant des $\lfloor \cdot \rfloor$ pour lesquelles on peut trouver une formule close. Est-ce possible pour d'autres sommes ? La réponse est oui. Il y a un truc qui marche généralement dans ce genre de cas : se débarrasser des parties entières en introduisant une nouvelle variable.

Par exemple, voyons s'il est possible de trouver une formule close pour la somme

$$\sum_{0 \leq k < n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor.$$

Choisissons d'introduire la variable $m = \lfloor \sqrt{k} \rfloor$. Cela peut être fait “mécaniquement”, en procédant comme nous l'avons fait dans le problème de la roulette :

$$\begin{aligned}
 \sum_{0 \leq k < n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor &= \sum_{k, m \geq 0} m[k < n][m = \lfloor \sqrt{k} \rfloor] \\
 &= \sum_{k, m \geq 0} m[k < n][m \leq \sqrt{k} < m+1] \\
 &= \sum_{k, m \geq 0} m[k < n][m^2 \leq k < (m+1)^2] \\
 &= \sum_{k, m \geq 0} m[m^2 \leq k < (m+1)^2 \leq n] \\
 &\quad + \sum_{k, m \geq 0} m[m^2 \leq k < n < (m+1)^2].
 \end{aligned}$$

Encore une fois, les conditions aux bornes sont un peu délicates à gérer. Supposons pour commencer que $n = a^2$ est un carré parfait. Alors la seconde somme est nulle et on peut calculer la première en utilisant notre méthode habituelle :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k, m \geq 0} m[m^2 \leq k < (m+1)^2 \leq a^2] \\
 &= \sum_{m \geq 0} m((m+1)^2 - m^2)[m+1 \leq a] \\
 &= \sum_{m \geq 0} m(2m+1)[m < a] \\
 &= \sum_{m \geq 0} (2m^2 + 3m)[m < a] \\
 &= \sum_0^a (2m^2 + 3m) \delta m \\
 &= \frac{2}{3}a(a-1)(a-2) + \frac{3}{2}a(a-1) = \frac{1}{6}(4a+1)a(a-1).
 \end{aligned}$$

*Les puissances
descendantes font
tomber la somme.*

Dans le cas général, on peut poser $a = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Il suffit alors d'ajouter les termes pour $a^2 \leq k < n$, qui sont tous égaux à a ; leur somme vaut donc $(n - a^2)a$. On obtient ainsi la formule close désirée :

$$\sum_{0 \leq k < n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor = na - \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{6}a, \quad a = \lfloor \sqrt{n} \rfloor. \quad (3.27)$$

Une autre approche possible consiste à remplacer une expression de la forme $\lfloor x \rfloor$ par $\sum_j [1 \leq j \leq x]$; c'est autorisé si $x \geq 0$. Voici comment cette

méthode fonctionne pour la somme des [racines carrées], en supposant pour simplifier que $n = a^2$:

$$\begin{aligned}\sum_{0 \leq k < n} [\sqrt{k}] &= \sum_{j,k} [1 \leq j \leq \sqrt{k}] [0 \leq k < a^2] \\ &= \sum_{1 \leq j < a} \sum_k [j^2 \leq k < a^2] \\ &= \sum_{1 \leq j < a} (a^2 - j^2) = a^3 - \frac{1}{3}a(a + \frac{1}{2})(a + 1).\end{aligned}$$

Voici un autre exemple dans lequel un changement de variable permet de transformer une somme. Un théorème remarquable a été découvert vers 1909 indépendamment par trois mathématiciens : Bohl [34], Sierpiński [326] et Weyl [368] : si α est irrationnel, alors, lorsque $n \rightarrow \infty$, les parties fractionnaires $\{n\alpha\}$ sont distribuées de façon très uniforme entre 0 et 1. Plus formellement, on peut dire que pour tout α irrationnel et pour toute fonction f presque partout continue,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{0 \leq k < n} f(\{k\alpha\}) = \int_0^1 f(x) dx \quad (3.28)$$

Par exemple, on peut trouver la valeur *moyenne* de $\{n\alpha\}$ en posant $f(x) = x$; on obtient $\frac{1}{2}$ (c'est exactement ce à quoi on pouvait s'attendre, mais il est bon de savoir que c'est véritablement prouvé).

Le théorème de Bohl, Sierpiński et Weyl se démontre en encadrant $f(x)$ par des "fonctions en escalier" qui sont des combinaisons linéaires des fonctions simples

$$f_v(x) = [0 \leq x < v]$$

avec $0 \leq v \leq 1$. Notre but n'est pas de prouver ce théorème ; c'est un boulot qu'on trouve dans les livres de calcul infinitésimal. Nous allons cependant essayer de découvrir intuitivement pourquoi il marche. Pour cela, nous allons voir s'il se comporte bien lorsque $f(x) = f_v(x)$. En d'autres termes, observons à quelle distance la somme

$$\sum_{0 \leq k < n} [\{k\alpha\} < v]$$

se rapproche de la valeur "idéale" nv quand n est grand et α irrationnel.

Pour cela, on définit la *discrépance* $D(\alpha, n)$ comme le maximum, pour tout $0 \leq v \leq 1$, de la valeur absolue de la somme

$$s(\alpha, n, v) = \sum_{0 \leq k < n} ([\{k\alpha\} < v] - v). \quad (3.29)$$

*Avertissement :
ce qui suit est de
haut niveau. En
première lecture,
il vaut mieux sau-
ter les deux pages
qui suivent ; elles
ne sont pas d'une
importance capitale.*
— Votre
sympathique chargé
de TD

↓ Sauter
à partir d'ici

Notre but est de prouver que $D(\alpha, n)$ "n'est pas trop grand" comparé à n , en montrant que $|s(\alpha, n, v)|$ est toujours raisonnablement petit lorsque α est irrationnel.

Ecrivons tout d'abord $s(\alpha, n, v)$ plus simplement et introduisons une nouvelle variable d'indice j :

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k < n} ([\{k\alpha\} < v] - v) &= \sum_{0 \leq k < n} ([k\alpha] - [k\alpha - v] - v) \\ &= -nv + \sum_{0 \leq k < n} \sum_j [k\alpha - v < j \leq k\alpha] \\ &= -nv + \sum_{0 \leq j < [n\alpha]} \sum_{k < n} [j\alpha^{-1} \leq k < (j+v)\alpha^{-1}]. \end{aligned}$$

Avec un peu de chance, on va pouvoir calculer la somme interne ; mais il nous faut introduire de nouvelles variables si on ne veut pas faire trop de gâchis. On peut supposer sans perte de généralité que $0 < \alpha < 1$. Posons alors

Bien vu : nommer pour régner. Le point crucial est le changement de variable de k en j .
— Votre sympathique chargé de TD

$$\begin{aligned} a &= [\alpha^{-1}], & \alpha^{-1} &= a + \alpha'; \\ b &= [v\alpha^{-1}], & v\alpha^{-1} &= b - v'. \end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha' = \{\alpha^{-1}\}$ est la partie fractionnaire de α^{-1} , et v' est la partie fractionnaire de $v\alpha^{-1}$.

Encore une fois, nos seuls motifs d'inquiétude sont les conditions aux bornes. Oublions pour le moment la restriction " $k < n$ " et évaluons la somme sur k :

$$\begin{aligned} \sum_k [k \in [j\alpha^{-1} .. (j+v)\alpha^{-1}]] &= [(j+v)(a + \alpha')] - [j(a + \alpha')] \\ &= b + [j\alpha' - v'] - [j\alpha']. \end{aligned}$$

Parfait. C'est très facile en fait. Cela nous donne

$$s(\alpha, n, v) = -nv + [n\alpha]b + \sum_{0 \leq j < [n\alpha]} ([j\alpha' - v'] - [j\alpha']) - S, \quad (3.30)$$

où S est un terme correcteur pour les cas où $k \geq n$, cas dont nous n'avons pas pu nous débarrasser. La quantité $j\alpha'$ ne pourra jamais être entière (sauf si $j = 0$), car α (et donc α') est irrationnel ; et $j\alpha' - v'$ ne pourra être un entier que pour au plus une valeur de j . On peut donc transformer les parties entières supérieures en parties entières inférieures :

$$s(\alpha, n, v) = -nv + [n\alpha]b - \sum_{0 \leq j < [n\alpha]} ([j\alpha'] - [j\alpha' - v']) - S + \{0 \text{ ou } 1\}.$$

Voilà qui est intéressant. Au lieu d'une forme close, nous obtenons une somme qui ressemble tout à fait à $s(\alpha, n, v)$, mais avec des paramètres différents : α' au lieu de α , $\lceil n\alpha \rceil$ au lieu de n et v' au lieu de v . Nous allons ainsi obtenir une récurrence pour $s(\alpha, n, v)$ qui (espérons le) va nous nous conduire à une récurrence pour la discrétance $D(\alpha, n)$. Prenons donc

$$s(\alpha', \lceil n\alpha \rceil, v') = \sum_{0 \leq j < \lceil n\alpha \rceil} (\lfloor j\alpha' \rfloor - \lfloor j\alpha' - v' \rfloor - v')$$

et portons le dans

$$s(\alpha, n, v) = -nv + \lceil n\alpha \rceil b - \lceil n\alpha \rceil v' - s(\alpha', \lceil n\alpha \rceil, v') - S + \{0 \text{ ou } 1\}.$$

Si on se souvient que $b - v' = v\alpha^{-1}$, on voit que tout cela va magnifiquement se simplifier en remplaçant $\lceil n\alpha \rceil(b - v')$ par $n\alpha(b - v') = nv$:

$$s(\alpha, n, v) = -s(\alpha', \lceil n\alpha \rceil, v') - S + \epsilon + \{0 \text{ or } 1\}.$$

Le terme ϵ désigne une erreur positive inférieure ou égale à $v\alpha^{-1}$. L'exercice 18 montre que, de manière similaire, S est compris entre 0 et $\lceil v\alpha^{-1} \rceil$. De plus, on peut sortir de la somme le terme correspondant à $j = \lceil n\alpha \rceil - 1 = \lfloor n\alpha \rfloor$ car il est égal soit à v' , soit à $v' - 1$. Par conséquent, en prenant le maximum des valeurs absolues pour tout v , on trouve

$$D(\alpha, n) < D(\alpha', \lfloor n\alpha \rfloor) + \alpha^{-1} + 2. \quad (3.31)$$

Les méthodes que nous apprendrons dans les chapitres suivants nous permettront de déduire de cette récurrence que $D(\alpha, n)$ est toujours beaucoup plus petit que n lorsque n est suffisamment grand. Ainsi le théorème (3.28) est vrai ; cependant la convergence n'est pas toujours très rapide (voir les exercices 9.45 et 9.61).

Ouf ! C'était un sacré exercice de manipulation de sommes et de parties entières ! Les lecteurs qui n'ont pas l'habitude de "prouver que l'erreur est négligeable" ont peut-être du mal à croire qu'il vaille le coup de s'attaquer à des sommes aussi alambiquées. En fait, si on y regarde de plus près, on voit qu'il y a un fil conducteur dans tout les calcul que nous avons effectués. L'idée principale est la suivante : une certaine somme $s(\alpha, n, v)$ de n termes peut se réduire à une somme similaire de $\lceil n\alpha \rceil$ termes au plus. Tout le reste disparaît, sauf un petit résidu qui provient des termes proches des bornes. A présent, respirons un grand coup et voyons une nouvelle somme. Elle n'est pas triviale mais possède un avantage non négligeable (par rapport à la précédente) : sa forme close sera facile à vérifier. Notre but est de trouver une expression pour

$$\sum_{0 \leq k < m} \left\lfloor \frac{nk + x}{m} \right\rfloor, \quad m > 0 \text{ entier}, \quad n \text{ entier}.$$

(La formule $\{0 \text{ ou } 1\}$ dénote quelque chose qui est soit 0, soit 1 ; cela ne nous engage en rien, car en fait ces détails n'ont pas vraiment d'importance).

Atterrir
ici

Autant vous prévenez tout de suite : voici la première application d'un précepte selon lequel un chapitre doit finir par la résolution d'un problème long et difficile, demandant une motivation un peu plus importante que la simple curiosité.

— Des étudiants

Touché. Mais alors, les gars, il faut obligatoirement vous parler d'applications pratiques pour que vous vous intéressiez à quelque chose ? Cette somme apparaît, par exemple, lorsque l'on étudie ou teste des générateurs de nombres aléatoires. Cependant, les mathématiciens s'y sont intéressés bien avant l'apparition des ordinateurs car ils trouvaient naturel de se demander s'il existait un moyen de sommer des progressions arithmétiques "arrondies".

— Votre enseignant

Cela nous permettra de généraliser la somme de (3.26). Trouver une forme close de cette somme est un exercice plus coriace que tout ce que nous avons fait jusqu'à présent (sauf peut-être le problème de la discrétance que nous venons de voir). Cela ne nous empêchera pas d'en venir à bout, et ce sera très instructif.

Comme nous le faisons d'habitude, particulièrement pour les problèmes coriaces, commençons par regarder quelques petits exemples. Si $n = 1$, on a l'égalité (3.26), dans laquelle x est remplacé par x/m :

$$\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1+x}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m-1+x}{m} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Tout comme dans le chapitre 1, il peut-être utile de regarder le cas $n = 0$ pour avoir un peu plus d'information :

$$\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = m \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor.$$

Deux paramètres, m et n , interviennent dans notre problème. Observons quelques petits exemples pour des valeurs de m . Quand $m = 1$, il n'y a qu'un terme dans la somme et elle vaut $\lfloor x \rfloor$. Quand $m = 2$, sa valeur est $\lfloor x/2 \rfloor + \lfloor (x+n)/2 \rfloor$. Pour éviter l'interaction entre x et n , on peut chasser n de la partie entière inférieure, mais pour ce faire il nous faut considérer séparément les cas où n est pair ou impair. Si n est pair, alors $n/2$ est entier et il peut sortir de la partie entière :

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{n}{2} \right) = 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{n}{2}.$$

Si n est impair, alors $(n-1)/2$ est entier et on a donc

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \frac{n-1}{2} \right) = \lfloor x \rfloor + \frac{n-1}{2}.$$

La dernière étape se déduit de (3.26) en prenant $m = 2$.

Les formules pour n pair et n impair ressemblent un peu à celles correspondant à $n = 0$ et $n = 1$, mais aucun motif n'apparaît clairement encore. Examinons donc quelques petits exemples supplémentaires. Pour $m = 3$, la somme est

$$\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2n}{3} \right\rfloor,$$

et il nous faut considérer trois cas : soit n est un multiple de 3, soit il est plus grand d'une unité, soit il est plus grand de deux unités qu'un multiple de 3. En d'autres termes, $n \bmod 3 = 0, 1$, ou 2 . Si $n \bmod 3 = 0$, alors $n/3$

et $2n/3$ sont des entiers, donc la somme devient

$$\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \frac{n}{3} \right) + \left(\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \frac{2n}{3} \right) = 3 \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + n.$$

Si $n \bmod 3 = 1$, alors $(n-1)/3$ et $(2n-2)/3$ sont entiers et on a

$$\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \frac{n-1}{3} \right) + \left(\left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + \frac{2n-2}{3} \right) = \lfloor x \rfloor + n - 1.$$

De nouveau, on déduit la dernière étape de (3.26), en posant cette fois $m = 3$. Enfin, si $n \bmod 3 = 2$, alors

$$\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + \frac{n-2}{3} \right) + \left(\left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \frac{2n-1}{3} \right) = \lfloor x \rfloor + n - 1.$$

Notre cerveau gauche a terminé son travail pour $m = 3$; mais le cerveau droit ne voit toujours pas de motif. Continuons donc avec $m = 4$:

$$\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+3n}{4} \right\rfloor.$$

Au moins, nous savons maintenant qu'il faut considérer les cas qui dépendent de $n \bmod m$. Si $n \bmod 4 = 0$, alors

$$\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \frac{n}{4} \right) + \left(\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \frac{2n}{4} \right) + \left(\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \frac{3n}{4} \right) = 4 \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \frac{3n}{2}.$$

Si $n \bmod 4 = 1$,

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{x+1}{4} \right\rfloor + \frac{n-1}{4} \right) + \left(\left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor + \frac{2n-2}{4} \right) + \left(\left\lfloor \frac{x+3}{4} \right\rfloor + \frac{3n-3}{4} \right) \\ = \lfloor x \rfloor + \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Il se trouve que le cas $n \bmod 4 = 3$ donne exactement la même réponse. Pour finir, le cas $n \bmod 4 = 2$, qui est légèrement différent, nous donne un indice important pour le comportement de la somme en général :

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor + \frac{n-2}{4} \right) + \left(\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \frac{2n}{4} \right) + \left(\left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor + \frac{3n-2}{4} \right) \\ = 2 \left(\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{4} \right\rfloor \right) + \frac{3n}{2} - 1 = 2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \frac{3n}{2} - 1. \end{aligned}$$

La dernière égalité de ce calcul consiste à simplifier quelque chose de la forme $\lfloor y/2 \rfloor + \lfloor (y+1)/2 \rfloor$. C'est de nouveau un cas particulier de (3.26).

"Inventive genius requires pleasurable mental activity as a condition for its vigorous exercise. 'Necessity is the mother of invention' is a silly proverb. 'Necessity is the mother of futile dodges' is much nearer to the truth. The basis of the growth of modern invention is science, and science is almost wholly the outgrowth of pleasurable intellectual curiosity."

—A. N. Whitehead [371]

Voici les valeurs que prend notre somme lorsque m varie de 1 à 3 :

m	$n \bmod m = 0$	$n \bmod m = 1$	$n \bmod m = 2$	$n \bmod m = 3$
1	$\lfloor x \rfloor$			
2	$2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor + \frac{n}{2}$	$\lfloor x \rfloor + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$		
3	$3 \lfloor \frac{x}{3} \rfloor + n$	$\lfloor x \rfloor + n - 1$	$\lfloor x \rfloor + n - 1$	
4	$4 \lfloor \frac{x}{4} \rfloor + \frac{3n}{2}$	$\lfloor x \rfloor + \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}$	$2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor + \frac{3n}{2} - 1$	$\lfloor x \rfloor + \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}$

On dirait qu'on obtient quelque chose de la forme

$$a \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor + bn + c,$$

où a , b et c dépendent d'une certaine manière de m et n . Même un myope peut voir que b est probablement égal à $(m-1)/2$. Il est plus difficile de deviner une expression pour a ; pourtant, le cas $n \bmod 4 = 2$ semble nous suggérer que a pourrait être $\text{pgcd}(m, n)$, le plus grand commun diviseur de m et n . Ce ne serait pas très étonnant, car $\text{pgcd}(m, n)$ est la valeur par laquelle il faut diviser m et n pour réduire la fraction n/m , et cette fraction apparaît dans notre somme. (Nous étudierons de près le pgcd au chapitre 4). La valeur de c est encore mystérieuse, mais peut-être nos preuves pour a et b pourront-elles nous aider à la trouver.

Dans nos calculs pour des petites valeurs de m , nous avons réécrit chacun des termes de la somme comme ceci :

$$\left\lfloor \frac{x + kn}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x + kn \bmod m}{m} \right\rfloor + \frac{kn}{m} - \frac{kn \bmod m}{m},$$

car $(kn - kn \bmod m)/m$ est un entier et peut donc sortir de la partie entière. De la même façon, notre somme d'origine peut être développée comme dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{rcl}
 \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor & + & \frac{0}{m} - \frac{0 \bmod m}{m} \\
 + & \left\lfloor \frac{x + n \bmod m}{m} \right\rfloor + & \frac{n}{m} - \frac{n \bmod m}{m} \\
 + & \left\lfloor \frac{x + 2n \bmod m}{m} \right\rfloor + & \frac{2n}{m} - \frac{2n \bmod m}{m} \\
 & \vdots & \vdots \\
 + & \left\lfloor \frac{x + (m-1)n \bmod m}{m} \right\rfloor + & \frac{(m-1)n}{m} - \frac{(m-1)n \bmod m}{m}.
 \end{array}$$

Les trois colonnes de ce tableau correspondent respectivement aux valeurs $a\lfloor x/a \rfloor$, bn et c de nos précédents calculs.

On peut voir en particulier comment b apparaît. La seconde colonne représente une progression arithmétique dont la somme est égale, nous le savons, à la moyenne du premier et du dernier terme multipliée par le nombre de termes :

$$\frac{1}{2} \left(0 + \frac{(m-1)n}{m} \right) \cdot m = \frac{(m-1)n}{2}.$$

Nous venons ainsi de vérifier que $b = (m+1)/2$, comme nous l'avions présumé.

Les première et troisième colonnes paraissent plus coriaces. Pour déterminer les valeurs de a et c , regardons d'abord de plus près la suite de nombres

$$0 \bmod m, \quad n \bmod m, \quad 2n \bmod m, \quad \dots, \quad (m-1)n \bmod m.$$

Supposons par exemple que $m = 12$ et $n = 5$. Si on considère la suite comme les heures d'une horloge, nous avons 0 heure (= 12 heures), puis 5 heures, 10 heures, 3 heures (= 15 heures), 8 heures etc. Chaque heure se trouve exactement une fois dans la suite.

Prenons maintenant $m = 12$ et $n = 8$. La suite contient 0 heure, 8 heures, 4 heures (= 16 heures), puis on retrouve 0, 8, 4 et ainsi de suite. Comme 8 et 12 sont des multiples de 4 et le début de la suite est 0 (qui est aussi un multiple de 4), on ne sortira jamais de ce cycle.

Remarquons que $\text{pgcd}(12, 5) = 1$ et $\text{pgcd}(12, 8) = 4$. Nous démontrons dans le prochain chapitre que, si $d = \text{pgcd}(m, n)$, alors on obtient les nombres $0, d, 2d, \dots, m-d$ dans un certain ordre, suivis par $d-1$ copies de la même suite. Par exemple, si $m = 12$ et $n = 8$, la suite 0, 8, 4 apparaît quatre fois.

Un lemme maintenant, un dilemme plus tard.

Maintenant, la première colonne de notre somme prend tout son sens. Elle contient d copies des termes $\lfloor x/m \rfloor, \lfloor (x+d)/m \rfloor, \dots, \lfloor (x+m-d)/m \rfloor$, dans un certain ordre, donc sa somme est

$$\begin{aligned} & d \left(\left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+d}{m} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{x+m-d}{m} \right\rfloor \right) \\ &= d \left(\left\lfloor \frac{x/d}{m/d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x/d+1}{m/d} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{x/d+m/d-1}{m/d} \right\rfloor \right) \\ &= d \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor. \end{aligned}$$

La dernière égalité est, une fois de plus, une application de (3.26). Nous

venons de montrer que, comme nous l'avions deviné,

$$a = d = \text{pgcd}(m, n).$$

De plus, comme nous le pensions, nous pouvons maintenant trouver c , car on voit bien mieux maintenant ce qui se passe dans la troisième colonne. Elle contient d copies de la progression arithmétique $0/m, d/m, 2d/m, \dots, (m-d)/m$; sa somme vaut donc

$$d \left(\frac{1}{2} \left(0 + \frac{m-d}{m} \right) \cdot \frac{m}{d} \right) = \frac{m-d}{2}.$$

En fait, la troisième colonne n'est pas additionnée mais soustraite, par conséquent

$$c = \frac{d-m}{2}.$$

Ainsi le mystère est dévoilé et notre quête touche à sa fin. La forme close que nous cherchions est

$$\sum_{0 \leq k < m} \left\lfloor \frac{nk+x}{m} \right\rfloor = d \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + \frac{m-1}{2}n + \frac{d-m}{2},$$

où $d = \text{pgcd}(m, n)$. Juste pour vérifier, calculons la pour les cas déjà connus $n = 0$ et $n = 1$. Quand $n = 0$, on a $d = \text{pgcd}(m, 0) = m$; les deux derniers termes de la formule sont nuls et on obtient bien $m \lfloor x/m \rfloor$. Lorsque $n = 1$, $d = \text{pgcd}(m, 1) = 1$; les deux derniers termes se neutralisent mutuellement et la somme vaut $\lfloor x \rfloor$ comme prévu.

En triturant encore un peu la forme close, on peut la rendre symétrique en m et n :

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq k < m} \left\lfloor \frac{nk+x}{m} \right\rfloor &= d \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + \frac{m-1}{2}n + \frac{d-m}{2} \\ &= d \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + \frac{(m-1)(n-1)}{2} + \frac{m-1}{2} + \frac{d-m}{2} \\ &= d \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + \frac{(m-1)(n-1)}{2} + \frac{d-1}{2}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ma surprise est entière.

C'est surprenant, car, algébriquement parlant, il n'y a pas de raison de se douter qu'une telle somme puisse être symétrique. Nous venons de démontrer la "loi de réciprocité" suivante :

$$\sum_{0 \leq k < m} \left\lfloor \frac{nk+x}{m} \right\rfloor = \sum_{0 \leq k < n} \left\lfloor \frac{mk+x}{n} \right\rfloor, \quad m, n > 0 \text{ entiers.}$$

Par exemple, si $m = 41$ et $n = 127$, la somme de gauche contient 41 termes tandis que celle de droite en a 127 ; et pourtant, elles sont égales pour tout réel x .

Exercices

Echauffements

- 1 Au cours de l'analyse du problème de Joseph au chapitre 1, nous avons décidé d'écrire un entier n quelconque sous la forme $n = 2^m + l$, où $0 \leq l < 2^m$. Calculez explicitement l et m en fonction de n , en utilisant les crochets de partie entière inférieure et/ou supérieure.
- 2 Trouvez une formule qui donne l'entier le plus proche d'un nombre réel donné x . Si x se trouve exactement au milieu de deux entiers, donnez une expression qui arrondit (a) par excès ; (b) par défaut.
- 3 Calculez $\lfloor \lfloor m\alpha \rfloor n / \alpha \rfloor$, où m et n sont des entiers strictement positifs et α un nombre irrationnel supérieur à n .
- 4 On définit dans ce chapitre les problèmes de niveau 1 à 5. Qu'est-ce qu'un problème de niveau 0 ? (Celui-ci n'est *pas* un problème de niveau 0).
- 5 Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que $\lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor$ lorsque n est un entier strictement positif. (On a le droit d'utiliser $\{x\}$ dans la condition).
- 6 Peut-on dire quelque chose d'intéressant sur $\lfloor f(x) \rfloor$ quand $f(x)$ est une fonction continue et strictement *décroissante* dont la valeur ne peut être entière que si x est un entier ?
- 7 Résolvez la récurrence

$$\begin{aligned} X_n &= n, & \text{pour } 0 \leq n < m; \\ X_n &= X_{n-m} + 1, & \text{pour } n \geq m. \end{aligned}$$

- 8 Démontrez le *principe des boîtes de Dirichlet* : si on range n objets dans m boîtes, il y a au moins une boîte qui contient $\geq \lceil n/m \rceil$ objets, et au moins une boîte qui en contient $\leq \lfloor n/m \rfloor$.
- 9 En 1800 avant Jésus-Christ, les mathématiciens égyptiens représentaient les nombres rationnels entre 0 et 1 comme des sommes de fractions unitaires $1/x_1 + \dots + 1/x_k$, où les x_i étaient des entiers strictement positifs distincts. Par exemple, ils écrivaient $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ au lieu de $\frac{2}{5}$. Montrez qu'on peut toujours le faire de façon systématique : si $0 < m/n < 1$, alors

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{q} + \left\{ \text{représentation de } \frac{m}{n} - \frac{1}{q} \right\}, \quad q = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil.$$

Comment sait-on si on est à l'université ? C'est quand votre livre ne vous dit pas comment on doit prononcer "Dirichlet".